Mário Olivero

Volume 1

História da Matemática através de Problemas

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

História da Matemática através de Problemas

Volume 1 | Mário Olivero

UFF – Instituto de Matemática
EB – Centro de Estudos de Pessoal

Curso de Instrumentação para o Ensino da Matemática

GOVERNO DO Rio de Janeiro
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL
Ministério da Educação
BRASIL UM PAÍS DE TODOS GOVERNO FEDERAL

Apoio:
FAPERJ Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro
FUNDAÇÃO SANTA CABRINI Provedora de acesso à Cidadania

Fundação Cecierj / Consórcio Cederj

Rua Visconde de Niterói, 1364 – Mangueira – Rio de Janeiro, RJ – CEP 20943-001
Tel.: (21) 2334-1569 Fax: (21) 2568-0725

Material Didático

ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO
Mário Olivero

CAPA
Eduardo Bordoni

PRODUÇÃO GRÁFICA
Oséias Ferraz
Patricia Seabra

O material constante desta disciplina, História da Matemática através de Problemas, foi produzido sob o auspício de Convênio de cooperação técnico-acadêmica entre o Exército Brasileiro e a Universidade Federal Fluminense.

O48h Olivero, Mário.
História da matemática através de problemas / Mário Olivero. – Rio de Janeiro: UFF / CEP – EB, 2010. 160p. – (Curso de Instrumentação para o Ensino de Matemática).

ISBN: 85-98569-36-4

1. Matemática – História. 2. Matemática – Problemas.

CDD - 510.09

Publicado por: Centro de Estudos de Pessoal (CEP)

2010/1

Governo do Estado do Rio de Janeiro

Governador
Sérgio Cabral Filho

Secretário de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Alexandre Cardoso

Universidades Consorciadas

UENF - UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE DARCY RIBEIRO
Reitor: Almy Junior Cordeiro de Carvalho

UERJ - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Vieiralves

UFF - UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
Reitor: Roberto de Souza Salles

UFRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Aloísio Teixeira

UFRRJ - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
Reitor: Ricardo Motta Miranda

UNIRIO - UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
Reitora: Malvina Tania Tuttman

Apresentação

Há alguns anos eu resolvi aprender a jogar tênis. Inscrevi-me em um curso e passei a receber duas aulas semanais. Foi uma ótima experiência. Hoje eu jogo bastante bem, gosto muito do esporte e ganhei uma grande diversão. No entanto, a experiência deu-me mais do que isso.

Sou professor de Matemática há muito tempo e as aulas de tênis deram-me a oportunidade de relembrar o outro lado da atividade. Por exemplo, recordei-me da importância dos exercícios repetidos para assimilação de novos conteúdos. Tive a felicidade de encontrar um professor que me deu atenção e encorajamento, corrigindo minhas (muitas) imperfeições com paciência e bom humor. Reavaliei a importância da auto-disciplina para atingir objetivos estabelecidos. Com certeza, a experiência afetou minha vida profissional. Passei a ser mais tolerante e generoso como professor. Aprender algo novo ajudou-me a levar em conta a perspectiva do aluno, que precisa ser encorajado, aprender a valorizar a organização e a disciplina, precisa encontrar alegria na atividade de aprender e descobrir motivações para atingir os objetivos que lhe são propostos.

Você se encontra numa posição semelhante à minha, nesse momento. Está prestes a vivenciar uma experiência de aprendizado. Retomar os estudos requer uma atitude corajosa. Parabéns! Você merece uma recepção calorosa. Nesta disciplina, *História da Matemática Através de Problemas*, nosso principal objetivo é que você goste ainda mais de Matemática.

Aqui, você terá a oportunidade de ver a Matemática sob um novo prisma. Perceberá como as diferentes áreas matemáticas, tais como Álgebra, Geometria, Cálculo, Análise Matemática e outras, se relacionam e se influenciam, assim como certas questões (os tais problemas da Matemática) motivaram (e continuam motivando) novas descobertas. É bem provável que você passe a gostar ainda mais dos diversos temas com que lidamos na Matemática, uma vez que descobrirá como eles surgiram e se desenvolveram.

É claro que num projeto como esse certas opções devem ser feitas. Não é possível cobrir todos os temas, mesmo aqueles de maior importância. A escolha daqueles que representarão o nosso painel foram feitas em função de meu gosto pessoal (sim, todos nós temos nossas preferências matemáticas) assim como das minhas muitas inabilidades. De qualquer forma, se o conteúdo apresentado motivá-lo a buscar ainda mais informações sobre aquilo que ficou faltando, despertando a sua curiosidade, dar-me-ei por satisfeito.

Essa experiência deverá afetar, também, sua atuação profissional. Após cursar a disciplina você estará melhor preparado para apresentar os conteúdos de Matemática, colocando-os em um contexto histórico e mostrando suas conexões com outros temas. Seja, portanto, bem-vindo à *História da Matemática Através de Problemas*!

Sumário

Visão Geral da Disciplina

Unidade 1: Três Famosos Antigos Problemas

Assunto: Principais características da Matemática. Importância dos problemas e questões para seu desenvolvimento.

Onde encontrar: Textos 1 e 2.

Carga horária: *4h*

Unidade 2: O Dilema de Pitágoras

Assunto: Matemática do Antigo Egito e da Mesopotâmia. Diferenças entre a Matemática desses povos e a Matemática grega. Os pitagóricos.

Onde encontrar: Textos 3 a 5.

Carga horária: *6h*

Unidade 3: Teoria das Proporções de Eudoxo

Assunto: Primeira crise da Matemática: segmentos não-comensuráveis. Conceito de infinito. Solução para a crise dada por Eudoxo.

Onde encontrar: Textos 6 a 9.

Carga horária: *6h*

Unidade 4: O Quinto Postulado da Geometria Euclideana

Assunto: Elementos de Euclides. Problema do Quinto Postulado de Euclides. Geometrias não-euclidianas.

Onde encontrar: Textos 10 a 15.

Carga horária: *7h*

Unidade 5: Resolução das Equações Algébricas

Assunto: Matemática árabe e indiana. Surgimento do zero na Matemática. Solução para o problema das equações cúbicas.

Onde encontrar: Textos 16 a 19.

Carga horária: *7h*

Unidade 6: Uma Nova Matemática para um Mundo Novo

Assunto: Panorama matemático antes do Cálculo. O Cálculo segundo Newton e Leibniz.

Onde encontrar: Textos 20 a 23.

Carga horária: *7h*

Unidade 7: A Equação de Euler: $e^{i\pi} + 1 = 0$

Assunto: Características da Matemática do século 17 e 18. A Matemática de Euler. Notação matemática.

Onde encontrar: 24 e 25.

Carga horária: *7h*

Unidade 8: Construção dos Números Reais – Cauchy e Dedekind

Assunto: Características da Matemática do fim do século 18 e início do século 19. A Matemática de Gauss. Cortes de Dedekind. Contribuições de Cauchy e Weierstrass para a Análise Matemática.

Onde encontrar: 26 a 30.

Carga horária: *6h*

Unidade 9: Teoria de Conjuntos e Números Transfinitos de Cantor

Assunto: Características da Matemática no fim do século 19 e início do século 20. Contribuições feitas por Cantor e Hilbert.

Onde encontrar: Textos 31 a 34.

Carga horária: *6h*

Unidade 10: Números e Codificação de Mensagens

Assunto: Números primos. Criptografia.

Onde encontrar: Textos 35 a 38.

Carga horária: *4h*

Unidade 1

Três Famosos Antigos Problemas

Nesta unidade didática, você conhecerá três grandes problemas da antigüidade que desempenharam papéis relevantes no desenvolvimento da Matemática. Mas, primeiramente, vamos colocar certas coisas em perspectiva. Afinal de contas, precisamos de algum tempo para nos conhecer melhor.

Assim, antes de nos lançarmos nesta jornada, é importante considerar a questão tratada em nosso primeiro texto.

Texto 1: O que é Matemática?

Na verdade, pretendemos que você pense um pouco sobre esse tema, que demanda mais esforço do que podemos dispor em alguns minutos. Por exemplo, há um livro de cerca de quinhentas páginas, escrito por Courant e Robbins, cujo título é, precisamente, "O que é Matemática?"

Veja, a Matemática lida com duas idéias fundamentais: multiplicidade e espaço. Desde os primórdios os seres humanos se valem desses conceitos. Contar as reses de um rebanho ou os frutos de uma colheita, avaliar a área de campo de pastagem, de um campo a ser cultivado ou o volume de um vaso contendo grãos são tarefas que demandam conceitos matemáticos.

Dessa forma, podemos dizer que *números* e *figuras geométricas* são elementos fundamentais da Matemática. Podemos até ensaiar uma resposta: a Matemática é a ciência dos números e figuras geométricas, assim como as relações que possam existir entre eles.

Mesmo sentindo que a resposta contém parte da verdade, não podemos deixar de percebê-la incompleta. Nossa expectativa é que, ao fim do estudo da disciplina, você possa ter construído sua própria resposta para a questão.

1.1 Algumas características da Matemática

Agora, mudando um pouco o foco da nossa atenção, observe que, apesar da dificuldade que a maioria das pessoas tem para explicar o que é a Matemática, não é muito difícil detectar quando há "matemática" em determinada situação. Quem nunca usou a expressão "tão certo quanto dois e dois são quatro"?

É comum, no entanto, que as pessoas tenham uma visão parcial do que constitui a Matemática. Vejamos alguns aspectos que a caracterizam e distinguem das demais ciências.

Geralmente, quando se trata de Matemática, os números são as primeiras coisas mencionadas, não acha? Contudo, apesar da importância que eles têm, a Matemática não lida apenas com *números*, mas também com *formas*, assim como estuda as *relações* entre esses objetos.

O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher (1898 - 1970) aplicou em suas obras vários truques de ilusão ótica e perspectiva destorcida e repetições de certos padrões, conseguindo assim um forte impacto visual. Entre seus temas favoritos estão a metamorfose, a representação de infinito e situações paradoxais.

Por exemplo, ao observarmos algumas gravuras de Escher, não podemos deixar de notar a maneira como ele explora as simetrias e usa os padrões, o que dá um certo ar "matemático" às gravuras. Eis aqui uma de suas citações: "Para mim, permanece aberta a questão se (este trabalho) pertence ao mundo da matemática ou da arte."

Muito bem, vamos aumentar nossa coleção de informações sobre a Matemática: ela lida com *números* e *formas*, estuda *padrões* e busca *relações* entre seus objetos. Enfim, trata com uma multitude de idéias, submetendo-as a diferentes pontos de vista, comparando-as e buscando suas inter-relações.

É como um cenário onde uma enorme diversidade de atitudes, de perspectivas, se opõem e se influenciam mutuamente. O particular ilustra o geral, o contínuo se opõe ao discreto, períodos em que a atitude mais formal prevalece se intercalam com períodos onde a intuição abre novos caminhos e assim por diante.

Além disso, Matemática é uma ciência que difere de todas as outras na forma como estabelece a *verdade*. A verdade científica, na Matemática, é estabelecida a partir de um conjunto mínimo de afirmações, chamadas *axiomas*, por meio de um conjunto de regras lógicas bem estabelecidas. É o chamado *método dedutivo*.

Nas outras ciências, a verdade é estabelecida por experimentos científicos. É por isso que, em muitos casos, uma nova teoria toma o lugar da anterior, que já não consegue explicar os fenômenos que prevê.

Basta comparar, só para se ter um exemplo, a evolução histórica do conhecimento sobre o universo, em particular sobre o funcionamento do sistema solar, com a estabilidade vivida na Matemática, simbolizada nos *Elementos*, de Euclides, uma coleção de livros escritos em, aproximadamente, 250 a.C. Os *Elementos* só tiveram menos edições do que a Bíblia, e são tão corretos hoje como quando foram escritos.

1.2 A diversidade matemática

Um outro aspecto que chama a atenção sobre a Matemática é sua *diversidade*. Em muitas línguas, a palavra matemática é usada no plural. Há tantas ramificações e sub-áreas na Matemática contemporânea que é praticamente impossível acompanhar os desenvolvimentos mais recentes em todas as suas frentes de pesquisa.

Essa característica da Matemática, ter uma face voltada para questões de cunho exclusivamente matemático – que costuma ser chamada de matemática pura – e outra voltada para os problemas surgidos nas outras ciências – a matemática aplicada – a torna uma ciência cheia de surpresas. Para espanto até de muitos de seus criadores, teorias que nasceram no campo da matemática pura, sem nenhuma aparente aplicabilidade, podem encontrar seu caminho aplicado, e vice-versa. É como na música, quando temas sacros e profanos são trocados.

Finalmente, uma das características da Matemática, com a qual nos ocuparemos agora, até o fim desta unidade, é a ânsia de resolver problemas. Podemos dizer até que se trata da principal atividade dos matemáticos. Um matemático feliz é aquele que acabou de resolver um bom problema e ao fazer isso descobriu mais uma porção de novos problemas para pensar.

Você verá que, ao longo do tempo, algumas questões desafiaram a criatividade de gerações de matemáticos, norteando, estimulando a criação matemática. Essas questões funcionam como molas propulsoras, movendo as fronteiras do conhecimento cada vez mais adiante, como no caso de Alexandre Grothendieck.

1.3 Um grande matemático do século 20

Grothendieck passou os anos de 1953 a 1955 na Universidade de São Paulo.

Alexandre Grothendieck nasceu em 1928, em Berlim, e mudou-se para a França em 1941. Seus trabalhos inovadores tiveram grande impacto em diversos campos da Matemática, devido especialmente ao seu alto grau de abstração. Em 1966 recebeu a *Medalha Fields*, que é assim como um Prêmio Nobel da Matemática.

O número de outubro de 2004 da revista *Notices of the American Mathematical Society* traz um artigo sobre um dos mais relevantes matemáticos do século 20, Alexandre Grothendieck.

Nesse artigo aprendemos que os primeiros anos de Grothendieck, durante a Segunda Guerra, foram caóticos e traumáticos e sua formação educacional não fora nada boa. No entanto, a atitude de enfrentar os problemas, as questões da Matemática, já estava presente. Ele escreveu suas memórias, intituladas *Récoltes et Semailles* (algo como *Colheita e Semeadura*), em que faz o seguinte comentário:

> O que menos me satisfazia, nos meus livros de matemática [do liceu], era a total ausência de alguma definição séria da noção de comprimento [de uma curva], de área [de uma superfície], de volume [de um sólido]. Prometi a mim mesmo preencher esta lacuna assim que tivesse uma chance.

Detectar a falta de precisão na definição desses conceitos, quando ainda era um aluno do ensino médio, é uma prova da profunda percepção matemática dessa extraordinária pessoa.

Durante o estudo da disciplina, você irá verificar como são relevantes as preocupações apontadas por Alexandre Grothendieck. Mas, está na hora de refletir um pouco sobre as idéias expostas até aqui.
Vamos à primeira atividade.

Atividade 1

Para ajudá-lo nessa tarefa, tente dar sua própria resposta à questão "o que é Matemática?" Guarde esta resposta para relê-la quando tiver completado o estudo da disciplina.

Faça, também, uma lista sucinta das características da Matemática apresentadas no texto. Você poderia acrescentar outras?

Tudo que você estudou até aqui constitui uma introdução para o tema do próximo texto: três problemas famosos e antigos, diretamente relacionados a uma das características mais valorizadas em um matemático: a criatividade. Essa característica se manifesta, especialmente, na resolução de problemas.

Em muitos casos, a atitude de inconformismo diante das respostas dadas às antigas questões pelas gerações anteriores marcou o início da carreira de matemáticos famosos, como teremos a oportunidade de ver no decorrer de nossa jornada.

Texto 2: Três Famosos Problemas

O primeiro passo na resolução de um problema consiste na sua correta formulação. Ou seja, para resolver um problema, é melhor saber, precisamente, o que devemos fazer e do que dispomos para chegar à solução.

Os três problemas clássicos da Geometria grega são sobre como realizar uma construção geométrica usando apenas régua e compasso. Veja seus enunciados:

> Trissecção do ângulo:
>
> Dado um ângulo, construir um outro ângulo com um terço de sua amplitude.
>
> Duplicação do cubo:
>
> Dado um cubo, construir outro cubo com o dobro do volume do anterior.
>
> Quadratura do círculo:
>
> Dado um círculo, construir um quadrado com a mesma área.

Antes de falarmos sobre eles, vamos entender o significado da expressão "construção com régua e compasso".

Note que esses problemas estão colocados no contexto da geometria formulada por Euclides. Por isso, as construções com régua e compasso são também conhecidas por "construções euclidianas", apesar de os termos "régua" e "compasso" não aparecerem nos livros de Euclides.

Assim, as soluções deveriam obedecer apenas certos *procedimentos*, por assim dizer, seguir regras muito bem estabelecidas.

Veja, na teoria euclidiana, a régua pode ser usada para *construir um segmento, tão longo quanto se queira, que contenha dois pontos dados*. Em particular, essa régua não é graduada. Ou seja, não podemos utilizá-la para medir.

Já o compasso pode ser usado para construir a circunferência de centro em um dado ponto A e que passa por um dado ponto B. Assim, o compasso deve ter pernas tão compridas quanto precisarmos.

Procure, então, realizar as atividades a seguir.

Atividade 2

Usando régua e compasso, construa a mediatriz de um segmento dado. Você sabe dividir um segmento dado em uma outra proporção qualquer, assim como 2 por 3?

Construa também um triângulo equilátero. Você poderia construir mais um polígono regular, usando apenas régua e compasso?

Quais polígonos regulares podem ser construídos com régua e compasso?

Vamos, agora, falar um pouco do primeiro problema.

2.1 A trissecção do ângulo

Repare que, usando régua e compasso, não é difícil construir a bissetriz de um ângulo dado. Basta construir uma circunferência com centro no vértice do ângulo, marcando sobre os lados do ângulo, dois pontos (eqüidistantes do vértice). Em seguida, construindo dois círculos de mesmo raio, com centros nos respectivos pontos obtidos nos lados do ângulo, determine o ponto que, juntamente com o vértice original, define a reta bissetriz.

Tal sucesso encoraja a consideração do próximo passo: dividir o ângulo em três partes iguais. Para certos ângulos específicos, o problema tem solução. Como é possível construir, com régua e compasso, um triângulo eqüilátero, podemos construir um ângulo de trinta graus, que divide o ângulo reto em três partes iguais. No entanto, o problema proposto nos pede para estabelecer um procedimento que funcione *para qualquer* ângulo dado.

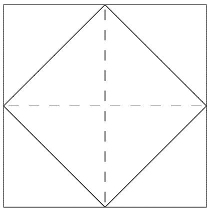
Muitas tentativas de solução para o problema foram dadas, mas cada uma delas apresentava uma falha. Também, pudera, o problema não tem solução. Você deve notar que demonstrar que não há uma solução (que sirva para um ângulo dado qualquer) é uma tarefa muito difícil. O problema era conhecido dos antigos gregos e a resposta (negativa) só foi obtida no século XIX, pelo francês Pierre Laurent Wantzel. Apesar da genialidade de Wantzel, é preciso dizer que sua solução depende de conceitos algébricos desenvolvidos ao longo de vários séculos, por várias gerações de matemáticos. Ou seja, o problema só foi solucionado quando se mudou o foco da questão, passando-se a buscar uma prova de que não tem solução.

Wantzel foi, ainda, o responsável pela resposta, também negativa, a outro problema: a duplicação do cubo.

2.2 A duplicação do cubo

Nesse caso, a situação é mais radical. Enquanto certos ângulos especiais podem ser divididos em três, usando régua e compasso, apesar de não haver um método geral que sirva para um ângulo genérico, não se pode duplicar *qualquer* cubo. Veja, o problema é o seguinte: dado um cubo (ou seja, conhecendo o lado de um dado cubo) devemos construir, com régua e compasso, um cubo que tenha, exatamente, o dobro de seu volume.

Novamente, os gregos conheciam uma *versão simples* do problema. Sócrates foi um dos mais originais pensadores de que temos notícia, mas tudo que sabemos de sua obra nos foi legado por Platão, que estudara com ele. Apesar de não ter sido um matemático, Sócrates é retratado em um dos diálogos de Platão, numa conversa com Ménon sobre a virtude, ensinando um jovem e inculto escravo a *duplicar um quadrado.*



Isto é, dado um quadrado, construir com régua e compasso um novo quadrado que tenha o dobro de sua área. Na primeira tentativa, o jovem dobra o lado do quadrado dado e Sócrates o faz ver o erro cometido. Em seguida, Sócrates mostra-lhe a figura de um quadrado com os pontos médios de seus lados unidos por segmentos que formam um quadrado menor. Então, Sócrates *ajuda* o rapaz a lembrar-se que a área do quadrado construído sobre a diagonal do quadrado menor tem o dobro de sua área.

Finalmente, o último problema consiste em construir com régua e compasso um quadrado de área igual à de um círculo dado. Por isso o nome quadratura do círculo.

2.3 A quadratura do círculo

Novamente, o problema só foi resolvido muito tempo depois de ter sido proposto. Em 1882, o matemático alemão Ferdinand von Lindemann demonstrou a impossibilidade de efetuar a quadratura do círculo usando apenas construções com régua e compasso.

Como isso foi feito? Apostamos que você está curioso. Realmente, vamos gastar o tempo que nos resta desta unidade para que você tenha ao menos uma idéia geral dos argumentos dados por Wentzel e por Lindemann.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) Seu lema era: *Pouca sed matura*, algo como "Pouco, porém maduro". Suas contribuições cobrem quase todas as áreas da Matemática, como Geometria, Teoria de Números e Análise Complexa. Foi também físico e astrônomo. O primeiro problema importante que ele resolveu, aos 19 anos, foi a descoberta de uma construção com régua e compasso de um polígono de 17 lados. Veja, desde o período clássico da Matemática na Grécia antiga, os únicos polígonos regulares que podiam ser construídos com régua e compasso eram o triângulo, o quadrado e o pentágono.

2.4 Algebrização dos problemas geométricos

Como podemos demonstrar que é impossível efetuar uma determinada construção com régua e compasso? Veja que, para mostrar que uma certa construção é possível, basta fazê-la.

O caminho para as demonstrações foi aberto por um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Carl Friedrich Gauss. A idéia é algebrizar o problema. Por exemplo, para duplicar o quadrado de lado 1, devemos construir um quadrado de lado $\sqrt{2}$. Mas, como podemos construir o quadrado de lado 1, temos a sua diagonal que mede $\sqrt{2}$.

O que Wantzel conseguiu provar, a partir das idéias de Gauss, foi:

Se C é um ponto obtido por uma construção com régua e compasso a partir de dois pontos dados A e B, então o quociente q das distâncias AC e AB tem as seguintes propriedades:

1. q é a raiz de um polinômio com coeficientes inteiros, não todos nulos. Nesse caso q é chamado de um *número algébrico*.
2. Se $p(x)$ for um polinômio de grau mínimo entre todos os polinômios com coeficientes inteiros, não todos nulos, dos quais q é uma raiz, então o grau de $p(x)$ é uma potência de 2.

Veja como a duplicação do quadrado se encaixa nesse esquema. O número $\sqrt{2}$ pode ser construído com régua e compasso, pois é a diagonal de um quadrado de lado 1. Realmente, $\sqrt{2}$ é uma das raízes do polinômio $x^2 - 2$, de coeficientes inteiros.

Ora, para duplicarmos o cubo de lado 1, teríamos que construir um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$. Esse número algébrico é raiz do polinômio $x^3 - 2$, que tem grau (mínimo) 3, que não é uma potência de 2.

No caso do problema da divisão de um ângulo em três partes iguais, a algebrização do problema também resulta em uma equação cúbica.

Na questão da quadratura do círculo (de raio 1, por exemplo,) teríamos que construir com régua e compasso um quadrado cujo lado medisse $\sqrt{\pi}$. Lindemann mostrou que π não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos. Ou seja, π não é um número algébrico e, portanto, $\sqrt{\pi}$ também não é um número algébrico.

Estamos chegando ao fim dessa unidade. Esperamos que sua curiosidade a respeito dos diversos aspectos da Matemática tenha sido aguçada e apresentamos mais duas atividades.

Atividade 3

Faça uma lista sucinta das diferentes características da Matemática apresentadas nessa unidade e acrescente algumas por você mesmo.

Atividade 4

Na sua opinião, o que teria incomodado tanto o matemático Grothendieck na leitura dos livros de Matemática em que estudou? Se estivesse estudando nos livros que nós usamos hoje em dia, ele teria uma opinião diferente?

A história desses três problemas clássicos da Matemática mostra como, em muitos casos, a importância não está na resposta de uma certa questão, seja ela positiva ou não, mas nos métodos usados para chegar até ela. Não devemos nos decepcionar com o fato de não podermos duplicar o cubo, por exemplo, pois a profundidade e a riqueza das idéias desenvolvidas para chegar à resposta negativa nos compensam largamente.

É nossa expectativa, também, que o enfoque sobre os problemas passe a fazer parte de sua maneira de ver a Matemática, pois nisso consiste, em enorme parte, a sua vitalidade e importância.

Unidade 2

O Dilema de Pitágoras

Nesta unidade didática você descobrirá como a Matemática tornou-se uma ciência, no sentido de ter uma maneira bem definida de se estabelecer a verdade.

Isso ocorreu com o surgimento da cultura grega, por volta de 600 a.C., quando os primeiros matemáticos de que temos notícia passaram a fazer e responder perguntas que começam com "por que", além daquelas que começam com "como".

No entanto, após os primeiros triunfos dessa jovem força criativa, surgiu uma grande crise, conhecida como o dilema de Pitágoras.

Texto 3: A Matemática dos "Esticadores de Cordas"

Para entender melhor essa história, você precisa conhecer um pouco o conteúdo matemático produzido pelos povos que habitavam as margens do rio Nilo, na África, e a região entre os rios Tigre e Eufrates, no Oriente Médio, cujas culturas antecederam a grega e, certamente, a influenciaram.

Uma das mais fascinantes civilizações antigas de que temos notícia desenvolveu-se às margens do rio Nilo, no norte da África – a civilização egípcia.

Todos nós sabemos como foi requintada a cultura desse povo que adorava gatos, construía pirâmides monumentais para enterrar seus reis embalsamados – os faraós – que eles acreditavam serem descendentes de seus deuses.

Entre tantas coisas dignas de nota a respeito dos antigos egípcios está o fato de eles terem desenvolvido uma forma de escrita – os hieróglifos – deixando-nos, No primeiro volume da coleção *Mar de Histórias*, uma antologia do conto mundial, organizada por Aurélio Buarque de Holanda e Paulo Rónai, editado pela Nova Fronteira, há um conto egípcio, chamado *A história de Rampsinitos*.

assim, relatos e registros de suas conquistas culturais.

Aristóteles acreditava que a atividade matemática surgira no Egito, criada por seus sacerdotes, uma vez que eles dispunham de tempo ocioso.

Por mais interessante que seja essa possibilidade, devemos levar em conta a versão dada por Heródoto, chamado de "pai da História". Ele afirmava que a Geometria havia sido inventada no Egito, devido às cheias anuais do rio Nilo, que fertilizavam suas margens, o que era ótimo para a agricultura. No entanto, quando as águas retornavam ao leito normal do rio, as marcações dos terrenos precisavam ser refeitas.

É por isso que Demócrito, filósofo grego que teria visitado o Egito, chamava os matemáticos locais de "esticadores de cordas", que eles usavam para fazer as demarcações. Veja que geometria é formada pelas palavras gregas *geo*, que quer dizer terra, e *metria*, que quer dizer medida.

3.1 Revelação de obscuros segredos

Há duas importantes fontes de informações sobre o tipo de matemática praticada no antigo Egito. São dois papiros, conhecidos como Papiro de Moscou, que data de 1850 a.C., e Papiro Rhind, de 1650 a.C., que se encontra no Museu Britânico. Apesar do Papiro Rhind iniciar com a promessa de apresentar ao leitor "um estudo completo de todas as coisas, conhecimento de tudo o que existe, revelação dos mais obscuros segredos", os dois são coleções de problemas resolvidos, todos relativamente simples. Os estudantes desses papiros aprenderiam com os exemplos a calcular a quantidade de tijolos usados para construir uma rampa de um dado tamanho ou a quantidade de cestos de pães suficientes para alimentar os escravos necessários para executar uma certa tarefa e assim por diante. Apesar da propaganda um pouco enganosa, esses papiros cumpriam um papel essencial na transmissão dos conhecimentos. Os antigos egípcios conheciam a importância dos exemplos na aprendizagem.

O Papiro Rhind nos revela como eles dividiam, extraíam raízes quadradas, resolviam problemas equivalentes a equações lineares, lidavam com progressões aritméticas. Eles usavam 3.16 como uma aproximação de π. O problema 14 deste documento ensina a calcular o volume de um tronco de pirâmide.

3.2 Um exemplo da aritmética egípcia

Particularmente interessante é a maneira como eles efetuavam o produto de dois inteiros. Para multiplicar, por exemplo, 19 por 42, usamos o algoritmo da multiplicação baseado no sistema numérico posicional. Os egípcios usavam outra coisa, uma vez que não dispunham de tal facilidade. O método deles se baseia no fato que multiplicar e dividir por 2 é relativamente simples.

Começamos dispondo os dois números a serem multiplicados, um ao lado do outro, e construímos uma tabela com duas colunas de números. Veja a seguir.

Para obter a coluna da esquerda, basta seguir dobrando o número anterior a cada nova linha. Na coluna da direita, fazemos o contrário, dividindo o número por dois e colocando-o na linha de baixo, subtraindo 1 antes da divisão nos casos em que ele for ímpar. Nestes casos, fazemos uma pequena marca para destacar aquelas linhas das demais.

Vamos aprender através de um exemplo, como faziam os antigos escribas egípcios. Começamos colocando os números 42 e 19 na primeira linha da tabela e como 19 é um número ímpar, a destacaremos com uma marca.

$$\begin{array}{rrl} 42 & 19 & / \end{array}$$

Para construir a segunda linha, dobramos o número 42 e colocamos o resultado, 84, logo abaixo dele. Subtraindo 1 de 19 e dividindo por 2, obtemos 9 $(= 18/2)$, que colocamos abaixo dele. Essa segunda linha também é marcada, uma vez que 9 é ímpar.

$$\begin{array}{rrl} 42 & 19 & / \\ 84 & 9 & / \end{array}$$

Prosseguimos assim até obter 1 na coluna da direita. Veja, a seguir, a tabela completa.

$$\begin{array}{rrl} 42 & 19 & / \\ 84 & 9 & / \\ 168 & 4 & \\ 336 & 2 & \\ 672 & 1 & / \end{array}$$

Finalmente, para obter o resultado do produto, basta somar os números da coluna da esquerda correspondentes àquelas linhas que foram marcadas:

$$19 \times 42 = 42 + 84 + 672 = 798.$$

Parece mágica, mas não é. Esse algoritmo de multiplicação se baseia na expansão do multiplicando na base 2.

Note que $19 = 16 + 2 + 1 = 2^4 + 2^1 + 2^0$. Isto é, as marcas indicam precisamente as correspondentes potências de 2 que aparecem na composição do número. Veja, se considerarmos apenas a segunda coluna da tabela, trocarmos a marca por 1 e colocarmos 0 na sua ausência, obtemos a expansão de 19 na base 2. Para isso, basta dispor os dígitos obtidos, da direita para a esquerda, escrevendo na horizontal essa nova coluna. Veja a expansão de 19 na base 2:

19	1
9	1
4	0
2	0
1	1

$$(10011)_2.$$

Usamos o índice 2 para distinguir esse número (19 na base dois) de $10\,011$ (dez mil e onze).

Se multiplicarmos um número por uma soma de potências de 2, é claro que o resultado será a soma das correspondentes dobras, dobras de dobras e assim por diante, até completar o resultado.

Apresentamos uma atividade para você praticar.

Atividade 5

Na tabela a seguir, complete as colunas e efetue o produto de 26 por 31 usando o algoritmo apresentado.

31	26	
62	13	/
124	--	--
---	--	--
---	--	--

Note que a expansão de 26 na base 2 é $(11010)_2$, pois $26 = 16 + 8 + 2 = (1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (0 \times 2^0)$. Realmente, o primeiro dígito da direita para a esquerda na expansão de 26 na base 2 é zero, indicando que $1 = 2^0$ não faz parte das parcelas, uma vez que 26 é par.

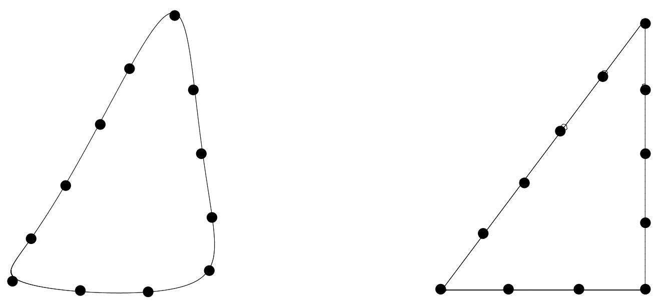
É interessante notar que o algoritmo conhecido pelos egípcios nos ensina a obter a expansão de um dado número na base 2. Usar apenas dois dígitos, 0 e 1, para denotar os números, é a base da construção dos nossos modernos computadores.

3.3 Os egípcios e o Teorema de Pitágoras

Os egípcios sabiam, à sua maneira, o reverso do Teorema de Pitágoras:

> Se os lados a, b e c de um triângulo satisfazem a relação
>
> $$a^2 + b^2 = c^2,$$
>
> então o triângulo é retângulo.

Para obter um ângulo reto, tão necessário para suas construções, eles usavam doze pedaços de corda de mesmo comprimento amarrados uns aos outros, formando um laço. Esticando propriamente esse laço obtinham um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 e o desejado ângulo. Veja a figura a seguir.



No entanto, os egípcios não deixaram nenhum registro de como chegaram à conclusão de que o triângulo de lados 3, 4 e 5 é retângulo, nem está claro que eles conheciam outros triângulos com a mesma propriedade.

Os matemáticos que viveram na região chamada Mesopotâmia, *entre os rios Tigre e Eufrates, chegaram mais longe do que seus colegas egípcios em suas descobertas matemáticas. A palavra Mesopotâmia vem do grego e significa* entre rios.

Texto 4: Nos Jardins Suspensos da Babilônia

Assim como no caso do Nilo, os rios Tigre e Eufrates garantiam a fertilidade na Mesopotâmia, favorecendo o desenvolvimento da agricultura e o surgimento de civilizações. Mas, enquanto as margens do Nilo foram ocupadas apenas pelos egípcios, a Mesopotâmia foi habitada por vários povos. Entre eles destacamos:

- sumérios – inventaram a primeira escrita de que temos notícia – chamada cuneiforme, registrada em tabuletas de barro;
- babilônios – criaram o primeiro conjunto de leis, o Código de Hamurabi.

Os sumérios foram absorvidos pelos babilônios, que tiveram sua fase mais desenvolvida por volta de 575 a.C., durante o reinado de Nabucodonossor.

4.1 As triplas babilônicas

As conquistas matemáticas desses povos ficaram registradas em tabuletas de argila. A mais famosa é conhecida como Plimpton 322, na qual está registrada uma família de pares de números, que geram *triplas pitagóricas*. Uma tripla pitagórica é formada por três números inteiros a, b e c, tais que $c^2 = a^2 + b^2$.

Por exemplo, os dois primeiros números dessa tabuleta são 119 e 169. Realmente, juntos com 120 eles geram um triângulo retângulo.

$$169^2 = 28\,561 \;=\; 14\,161 \;+\; 14\,400 \;=\; 119^2 + 120^2.$$

Portanto, $(119, 120, 169)$ é uma tripla pitagórica.

A tabuleta Plimpton 322 revela uma cultura matemática mais rica do que a egípcia. Os matemáticos da Mesopotâmia usavam um sistema numérico de base 60 (o nosso sistema é decimal, de base 10), bastante adequado ao estudo da astronomia, que eles conheciam muito bem. O uso do sistema numérico sexagesimal foi passado para a cultura grega que o preservou, pelo menos, nessa área. É por isso que dividimos o círculo em 360 graus, a hora em 60 minutos, e assim por diante.

Esses povos sabiam que os números

$$2uv, \quad u^2 - v^2 \;\text{ e }\; u^2 + v^2$$

geram uma tripla pitagórica, pois

$$(u^2 + v^2)^2 \;=\; (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2.$$

Isto é, se tomarmos $u = 12$ e $v = 5$, obtemos a tripla pitagórica $(12^2 - 5^2, 2 \times 12 \times 5, 12^2 + 5^2) = (119, 120, 169)$. No entanto, eles usavam essa técnica apenas para números u e v relativamente primos e tais que seus fatores primos fossem apenas 2, 3 ou 5, os fatores primos de 60.

Atividade 6

Usando $u = 64 = 2^6$ e $v = 27 = 3^3$, gere a segunda tripla pitagórica que aparece em Plimpton 322.

Sabendo que 4601 e 6649 são números na próxima tripla em Plimpton 322, descubra os correspondentes geradores u e v, assim como o terceiro número.

No início do século 6 a. C., a cidade de Mileto, na Jônia, assistiu ao surgimento de uma nova cultura, que dominaria o mundo por aproximadamente mil anos e influenciaria a maneira de pensar e produzir ciência até os nossos dias.

Texto 5: O Surgimento da Matemática Grega

Enquanto egípcios e babilônios armazenavam conhecimentos e os transmitiam às novas gerações sem maiores questionamentos, os matemáticos gregos passaram a buscar razões para explicar os resultados. Além disso, uniram a essa atitude o rigor lógico, que pautava toda sua atitude científica. Foi uma mudança extraordinária.

Outra característica introduzida pelos gregos foi a personalização da Matemática. Tales de Mileto é o primeiro matemático de que temos notícia. Ele deve ter sido um personagem muito especial. As muitas lendas e histórias associadas ao seu nome atestam isso.

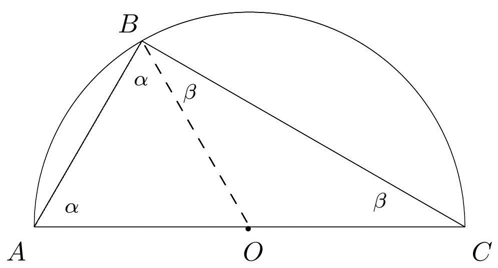
5.1 As contribuições de Tales de Mileto

Os principais resultados matemáticos associados a ele são:

- todo diâmetro divide o círculo em duas partes;
- os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
- ângulos opostos pelo vértice, formados por duas retas que se intersectam, são iguais;
- dois triângulos com dois ângulos e um lado iguais são congruentes;
- todo ângulo inscrito num semicírculo é reto.

Esse último resultado é conhecido como *Teorema de Tales*. Na verdade, todos esses fatos eram conhecidos dos matemáticos das outras culturas que o antecederam. No entanto, cabe a ele o mérito de ter providenciado suas demonstrações.

Veja, no caso de Teorema de Tales, considere o ângulo de vértice em B, inscrito no semicírculo ABC. Usando um segmento auxiliar que liga B ao centro do semicírculo, dividimos ABC em dois triângulos isósceles, pois OA, OB e OC são raios do semicírculo. Veja a ilustração.



Usando o resultado sobre triângulos isósceles, sabemos que os ângulos denotados por α e por β são iguais. Como a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é igual a dois ângulos retos, obtemos

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) \;=\; 2\,\text{ângulos retos}.$$

Portanto, $\alpha + \beta$ é um ângulo reto, como queríamos demonstrar.

Tales também deu contribuições à Filosofia.

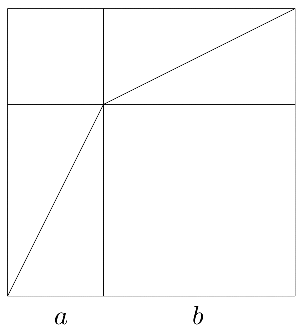
5.2 Pitágoras e o seu teorema

A figura mais lembrada desse período inicial da matemática grega foi, sem dúvida, Pitágoras. Entre os vários resultados atribuídos a ele, o mais famoso é o *Teorema de Pitágoras*, sobre triângulos retângulos. Como você pode ver, esse resultado era, essencialmente, conhecido pelas culturas que o antecederam, mas é atribuída a ele sua primeira demonstração. Conta a história que Pitágoras teria sacrificado cem bois quando descobriu a prova do teorema. Difícil de crer, uma vez que Pitágoras teria sido vegetariano. De qualquer forma, não sabemos exatamente qual foi a demonstração de Pitágoras. A demonstração oficial, digamos assim, apresentada no livro 1 dos Elementos, de Euclides, é o ápice do livro, que parece ter sido escrito para apresentá-la.

5.3 Uma demonstração do Teorema de Pitágoras

Você conhece a demonstração baseada na identidade algébrica $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$? Bem, aqui está ela.

Primeiro, observe que essa identidade pode ser demonstrada pelo diagrama a seguir.

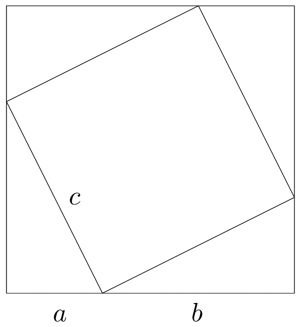


Note que $(a+b)^2$ é a área do quadrado de lado $a+b$, que está dividido em dois quadrados de lados a e b e em quatro triângulos retângulos agrupados dois a dois em dois retângulos de lados a e b.

A área de cada um dos quatro triângulos é $\frac{ab}{2}$. Assim, a área do quadrado maior é igual à soma das áreas dos dois quadrados menores com a área dos quatro triângulos:

$$(a+b)^2 \; = \; a^2 + b^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right) \; = \; a^2 + 2ab + b^2.$$

Agora, um novo arranjo dos triângulos dentro do quadrado maior revela em seu interior um quadrado de lado c, a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e b.



Esse diagrama nos diz que

$$(a+b)^2 \; = \; 2ab + c^2.$$

Reunindo ambas informações, obtemos $(a+b)^2 \; = \; a^2+b^2+2ab \; = \; c^2+2ab$. Portanto,

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Isso conclui a demonstração.

Pitágoras fundou uma irmandade cujos interesses iam além da Matemática. Os membros dessa irmandade atribuíam todas as suas descobertas a ele.

Apresentamos, a seguir, uma lista de algumas de suas descobertas, além da demonstração do Teorema de Pitágoras.

5.4 Outras contribuições dos pitagóricos

- Estudo das médias aritmética $\dfrac{a+b}{2}$, geométrica $\sqrt{ab}$ e harmônica $\dfrac{2ab}{a+b}$, assim como as relações entre elas.

- Estudo dos números perfeitos e dos pares de números *amigáveis*. Chamamos (m, n) um par de números inteiros positivos de números amigáveis, se a soma dos divisores próprios de um deles é igual ao outro e vice-versa. Por exemplo, os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 20, 11, 22, 44, 55 e 110, cuja soma é 284. Agora, os divisores próprios de 284 são 1, 2, 4, 71 e 142, cuja soma é 220.

  Na unidade didática 4 você conhecerá um fato muito interessante a respeito dos números perfeitos, aqueles cuja soma de seus divisores próprios é igual a ele mesmo, como $6 = 1 + 2 + 3$.

- Os pitagóricos conheciam os cinco sólidos regulares.

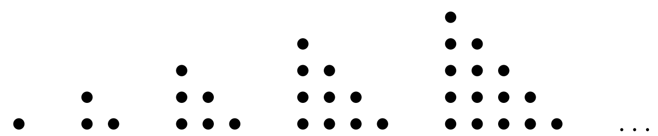
- Eles demonstravam uma grande consideração para os números e buscavam conhecê-los muito bem. Distinguiam entre eles os chamados *números figurados*, que contavam certos arranjos geométricos, como os números triangulares e quadrados.

É interessante como a perspectiva geométrica prevaleceu na cultura grega. Mesmo os resultados que hoje obteríamos por outras maneiras eram estudados de uma forma geométrica.

Veja um exemplo a seguir.

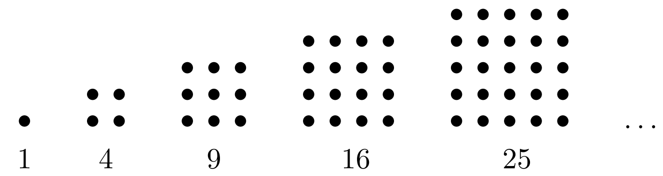
5.5 Números figurados e um resultado da teoria de números

Os números da forma $\dfrac{n(n+1)}{2}$, para n inteiro maior ou igual a 1, eram conhecidos pelos pitagóricos como números triangulares. Isso porque eles podem ser dispostos num diagrama na forma de triângulos. Aqui estão alguns deles.



$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15$

Agora consideraremos os números quadrados. Esses podem ser representados em diagramas na forma de quadrados, daí o seu nome:

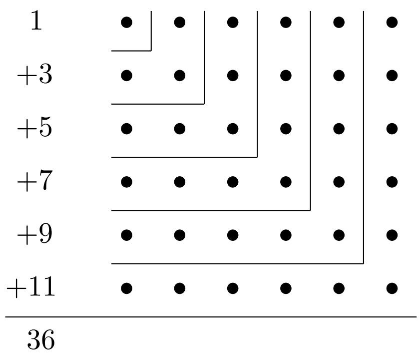


Veja um resultado de teoria de números que os pitagóricos demonstrariam usando, digamos assim, simples geometria.

> Teorema: A soma de uma seqüência de números ímpares, começando de 1, é um número quadrado:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+\ 3+5+7 &= 16 \\ 1+\ 3+5+7+9 &= 25 \end{aligned}$$

Podemos entender o que está acontecendo olhando o diagrama a seguir, assim como os pitagóricos o fizeram há mais ou menos 2500 anos.



Atividade 7

Use um esquema semelhante para mostrar que a soma de dois números triangulares subseqüentes, como 6 e 10, é um número quadrado.

Atividade 8

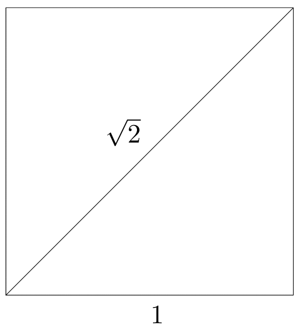
O número $12\,285$ é um elemento de um par de números amigáveis. Descubra o outro número desse par.

5.6 Segmentos comensuráveis e a primeira crise na Matemática

Um conceito usado pelos pitagóricos era a *comensurabilidade* de dois segmentos. Dois segmentos a e b são ditos *comensuráveis* se existir uma unidade de comprimento que meça, de maneira exata, ambos segmentos. Isto é, dados dois segmentos comensuráveis a e b, existe um segmento u e números inteiros p e q tais que $a = p\,u$ e $b = q\,u$. A *razão* de a por b é $\frac{p}{q}$.

Os pitagóricos acreditavam que quaisquer dois segmentos seriam comensuráveis. Por isso, a descoberta de um par de segmentos não comensuráveis gerou uma crise matemática sem precedentes. Isso ocorreu quando eles estudaram a razão entre a diagonal e o lado de um quadrado.

O fato de a diagonal e o lado de um dado quadrado não serem comensuráveis é equivalente a $\sqrt{2}$ não ser um número racional. Realmente, se tomarmos um quadrado de lado, digamos, 1, pelo Teorema de Pitágoras, o quadrado de sua diagonal será igual a 2.



O fato de $\sqrt{2}$ não poder ser expresso na forma p/q, para números inteiros p e q, significa que não existe segmento u tal que "lado do quadrado" $= q\,u$ e "diagonal do quadrado" $= p\,u$.

Essa descoberta gerou uma crise monumental, pois isso colocava em xeque toda a crença deles, de que a Matemática seria capaz de expressar qualquer coisa da natureza. Devemos lembrar que *número* para os pitagóricos significa *número inteiro* e as possíveis razões seriam os chamados números racionais.

Do ponto de vista prático, todo raciocínio matemático que empregava a suposição de que quaisquer dois segmentos são comensuráveis estava invalidado. Isso deixava um enorme mal-estar, pois os resultados demonstrados usando essa informação estavam, subitamente, invalidados. Era urgente descobrir uma nova cadeia de raciocínio que pudesse substituir esse elo partido e contornar o terrível *imbróglio*.

Quem resolveu o problema foi Eudoxo de Cnido. Mas isso será assunto para a próxima unidade didática. No entanto, antes de terminarmos esta unidade, veja uma demonstração.

5.7 $\sqrt{2}$ não é um número racional

A demonstração de que não há dois números inteiros p e q tais que $\frac{p^2}{q^2}$ seja igual a 2 está no livro *Primeiros Analíticos*, de Aristóteles. Ela é do tipo *redução ao absurdo*. Vamos supor que haja dois inteiros p e q tais que $\frac{p^2}{q^2} = 2$ e produzir uma afirmação absurda.

Realmente, suponhamos que tais números existam. Então, podemos tomá-los de tal forma que eles são primos entre si (não têm fatores comuns). Geometricamente, estamos supondo que a unidade u escolhida é a maior possível. Em particular, isso significa que eles não são ambos pares. Por outro lado, como $p^2 = 2\,q^2$, podemos concluir que p é par, uma vez que seu quadrado é um número par. Assim, existe um número inteiro r, tal que $p = 2\,r$.

Voltando à equação original, temos $(2\,r)^2 = p^2 = 2\,q^2$, donde concluímos que $q^2 = 2\,r^2$. Mas, isso significa que q também é par, o que contraria o fato original que os números p e q não são ambos pares. Fim da demonstração!

As civilizações que se desenvolveram às margens do Nilo e entre o Tigre e o Eufrates não foram as únicas nem as primeiras a produzir e a usar conhecimentos matemáticos. Praticamente todas as civilizações de que temos notícia desenvolveram algum tipo de conhecimento matemático. Dignos de nota são os casos da matemática chinesa, indiana e, no nosso continente, algumas civilizações andinas.

Por razões de ordem prática, consideramos apenas a matemática do Antigo Egito e da Mesopotâmia devido especialmente às suas conexões com a matemática grega. Não deixe de procurar informações sobre as outras culturas assim que tiver alguma oportunidade.

Unidade 3

Teoria das Proporções de Eudoxo

Na unidade anterior, você aprendeu como o surgimento da cultura grega, no início do século IV a.C., mudou profundamente a concepção que o homem tinha do universo, sua maneira de pensar e de produzir ciência.

Ousadia e inovação são palavras que facilmente associamos a este fenômeno cultural que desencadeou uma onda de criatividade, se estendeu por centenas de anos e deu base à nossa concepção de filosofia e de ciência.

Texto 6: A Primeira Grande Crise na Matemática

Os primeiros matemáticos gregos tomaram o volume de conhecimento matemático acumulado ao longo de milênios pelas culturas que floresceram na Mesopotâmia e no Egito e o moldaram à sua maneira.

No entanto, a descoberta de dois segmentos *não comensuráveis*, o lado e a diagonal de um quadrado, gerou uma crise profunda, perturbando essa ordem por eles criada com a força de um cataclismo.

Para entender a razão de tamanha comoção é preciso lembrar da maneira como os gregos passaram a conceber a Matemática, introduzindo o *método dedutivo*. Isso é o que chamamos de *axiomatização da Matemática*. Esta é, basicamente, a mesma maneira como fazemos Matemática até hoje.

Em poucas palavras, é o seguinte: o método dedutivo usa as regras definidas pela lógica (outra invenção dos gregos) para demonstrar as afirmações matemáticas, os teoremas, usando resultados anteriores. Esse processo precisa começar em algum lugar. Os pontos de partida são afirmações aceitas como verdadeiras, chamadas *axiomas*. As teorias matemáticas, isto é, as coleções de teoremas estabelecidos, permanecerão para sempre. Novas teorias podem ser construídas sobre este alicerce, ele as suportará. É uma situação totalmente diferente de outras ciências, como a Biologia ou a Física. Nestas ciências, acontece de novas teorias surgirem derrubando as anteriores.

6.1 A questão dos segmentos não comensuráveis, mais uma vez

Observe que, na terminologia atual, os termos *postulado* e *axioma* querem dizer a mesma coisa, são sinônimos. No passado, no entanto, dava-se o nome de axioma às afirmações que eram "evidentes por si mesmas e tinham que ser admitidas necessariamente como verdadeiras", já postulado "poderia ser demonstrado, mas era tomado como verdadeiro e usado sem demonstração". A priori, a afirmação chamada de postulado ainda não fora aceita como verdadeira pela pessoa a quem era endereçada. Por isso o nome, uma vez que postular também indica um pedido.

Neste quadro, os axiomas funcionam como verdadeiras pedras fundamentais sobre as quais toda a estrutura repousa. O primeiro axioma apresentado no primeiro livro dos Elementos de Euclides é a afirmação:

> Dados dois pontos, há um segmento de reta que os une.

A terminologia antiga é *postulado*. Veja, a palavra axioma, que agora usamos, originalmente significava *dignidade* ou *valor*.

Muito bem, os pitagóricos consideravam como axioma, ou seja, assumiam como verdadeira, a afirmação:

> Quaisquer dois segmentos são comensuráveis.

A descoberta de que o lado de um quadrado qualquer e a sua diagonal não são comensuráveis, equivalentemente $\sqrt{2}$ não é da forma p/q, para inteiros p e q, com q não nulo, significou que a afirmação não mais poderia ser usada como axioma. Isso invalidou todas as demonstrações que haviam sido feitas usando essa afirmação, de maneira direta ou indireta. Ou seja, uma série de teoremas ficaram, subitamente, sem suas demonstrações. Isto é, não eram mais teoremas. Numa palavra: desastre.

Realmente, os pitagóricos acreditavam que tudo que há no universo poderia ser descrito pela Matemática. Eles acreditavam na máxima:

> Todas as coisas são números.

A existência de dois segmentos não comensuráveis ameaçava esta afirmação, pois os números a que eles se referiam eram os números racionais.

Veja, o fato da relação entre o lado e a diagonal de um quadrado ser $\sqrt{2}$ mostra que existem relações físicas que não podem ser representadas em termos dos números racionais. Por isso, eles chamavam essa razão de *alogos*, o inexprimível.

Neste ponto, é preciso dizer uma palavra em favor dos pitagóricos. O erro cometido é sutil. A idéia é a seguinte: parece razoável que possamos medir dois segmentos quaisquer usando apenas múltiplos de uma certa unidade. Ora, basta que tomemos essa unidade *suficientemente pequena*, não é mesmo? Por exemplo, dadas duas distâncias, se não for possível medir ambas usando quilômetros de maneira justa (algo assim como 13 km ou 307 km), talvez possamos fazê-lo usando metros ou mesmo milímetros. Foi nisso que os antigos gregos acreditaram. Além do mais, há o aspecto prático, que não podemos esquecer. Até hoje, usamos aproximações racionais para expressar todas as grandezas do mundo que nos cerca. A tecnologia nos ajuda a melhorar essas aproximações.

No entanto, não é possível encontrar uma unidade de comprimento que meça, de maneira justa, o lado e a diagonal de um quadrado, por menor que seja, pois $\sqrt{2}$ não é um número racional, como vimos na unidade didática anterior.

A crise gerada pela existência de segmentos não comensuráveis perdurou até que um matemático genial apresentasse uma idéia nova, que alavancaria a questão. Esse matemático foi Eudoxo, nascido na ilha de Cnido, um contemporâneo de Platão, fundador de uma escola de filosofia, chamada Academia, que tanto influenciou nossa cultura.

Atividade 9

Você conhece outro exemplo de um par de magnitudes não comensuráveis?

Use o fato de π ser irracional para mostrar que o raio r de um círculo e sua circunferência, $2\,\pi\,r$, são não comensuráveis.

Você conhece duas áreas que sejam não comensuráveis? Pense no problema da quadratura do círculo.

Antes de contarmos um pouco da história de Eudoxo e de suas idéias para resolver o problema dos segmentos não comensuráveis, vamos falar sobre a noção de infinito, como era vista naquele tempo.

Texto 7: Problemas com Infinito

O que causou toda a dificuldade, isto é, a existência de segmentos não comensuráveis, de certa forma, é o infinito, um adversário fenomenal. Essa crise colocava os matemáticos da época frente a um conceito que tem provocado, ao longo da história da ciência, e da Matemática em particular, algumas de suas maiores dificuldades, mas que tem gerado, também, alguns de seus melhores resultados. O problema reside no fato de, mesmo não sendo $\sqrt{2}$ um número racional, podermos encontrar números racionais *arbitrariamente* próximos a ele.

7.1 $\sqrt{2}$ e as frações contínuas

Queremos obter uma seqüência de números racionais que estejam mais e mais próximos a $\sqrt{2}$. Uma maneira de fazer isso é expressando esse número como uma *fração contínua*. Você não precisa ser um *expert* no assunto, que é muito interessante, para entender a idéia geral.

Observe que

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1+\sqrt{2}-1 = \\ &= 1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \\ &= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}.\end{aligned}$$

Se você achou que essa é uma maneira estranha de escrever $\sqrt{2}$, veja o que mais podemos fazer.

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+1} = \frac{1}{2+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

Prosseguindo assim, obtemos

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{2+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1+\frac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = 1+\frac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}}}}$$

Esse processo pode ser *continuado* por tantas vezes quanto quisermos, gerando uma espécie de fração prolongada, representada por

$$\sqrt{2} \;=\; 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

Se interrompermos esse processo, obtemos um número racional que será uma *aproximação* racional de $\sqrt{2}$. Realmente, uma aproximação de $\sqrt{2}$ com 9 casas decimais é 1.414213562, enquanto

$$1{+}1/(2{+}1/(2{+}1/(2{+}1/(2{+}1/(2{+}1/(2{+}1/2)))))) \;=\; \frac{577}{408} \;=\; 1.414215686.$$

Uma fração contínua é algo assim como um *fractal algébrico*.

Agora vamos dar uma pausa para você fazer um exercício.

Atividade 10

Use a igualdade

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \;=\; 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

para gerar uma fração contínua, como foi feito no caso de $\sqrt{2}$.

Use essa fração contínua para calcular uma *boa* aproximação do número $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, conhecido como *razão áurea* e uma *boa* aproximação de $\sqrt{5}$.

Continuando, lembramos que a noção infinito é de enorme importância para a Matemática, mas as dificuldades que apresenta são igualmente fenomenais, como você pode perceber, no caso da crise gerada pelo descobrimento da existência de comprimentos não comensuráveis.

Essas crises se repetem ao longo da história e cada superação representa um avanço monumental. O surgimento do Cálculo, no século 17, e a compreensão das teorias desenvolvidas por Cantor, no início do século 20, são exemplos disso.

Texto 8: Zenão e seus Paradoxos

Zenão de Eléia

Paradoxo (do grego $\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\varsigma$) significava, originalmente, opinião errada, em oposição a ortodoxo, que significava opinião correta. Com o passar do tempo a palavra paradoxo passou a indicar as afirmações auto-contraditórias, como 'eu estou mentindo'. Se admitirmos que a frase é verdadeira, surge uma contradição. Se admitirmos que ela é falsa, ocorre a mesma coisa.

A disputa finito versus infinito é quase tão antiga quanto a Matemática e suas dificuldades indicam a importância da questão. É claro que esse problema transcende a Matemática.

Os paradoxos de Zenão são resultados dessa antiga disputa. Para que você entenda como eles se colocam é preciso ter uma idéia do contexto cultural onde eles surgiram.

Do ponto de vista da filosofia, o principal debate está na questão da verdadeira existência de algo que seja infinito. Todos concordam que o conjunto dos números naturais é uma coisa *potencialmente* infinita. Algo como um infinito *virtual*. No entanto, como diria Aristóteles, esse infinito só existe nas nossas mentes.

Anaximandro, discípulo de Tales de Mileto, concebia o universo como uma infinidade de mundos que existem desde sempre e que existirão durante um tempo inesgotável. Dessa forma, ele inaugurou a questão posicionando-se a favor da existência de algo infinito.

Em posição radicalmente oposta a Anaximandro, Parmênides acreditava que o universo seria constituído de um único objeto. Essa concepção monista do universo implica a negação de qualquer movimento. Isso porque a existência de algum movimento demanda uma posição inicial e uma posição final, contrariando a unicidade do universo.

Muito bem, Zenão era discípulo de Parmênides e queria dar suporte à teoria de seu mestre, mostrando que o movimento seria apenas uma ilusão. Para tanto, produziu quatro famosos argumentos com os quais pretendia mostrar que admitir a existência de movimento implicaria algum tipo de absurdo. Esses argumentos são conhecidos como *paradoxos de Zenão*.

Um desses paradoxos afirma ser *impossível* levantar-se da cadeira onde você está sentado e caminhar até a porta mais próxima. Isto porque primeiro você teria que caminhar a metade desta distância e depois teria que caminhar a metade da metade que estaria faltando. Em seguida, a metade do que restou e assim por diante, interminavelmente.

O absurdo que este paradoxo apresenta se deve à negação do infinito. Se admitirmos, como normalmente o fazemos, ser possível percorrer uma infinidade de pontos em um intervalo finito de tempo, podemos refutá-lo facilmente. Ou seja, Zenão nega o infinito para concluir que o movimento é um absurdo.

Este paradoxo de Zenão pode ser apresentado de uma maneira matemática. Veja:

Um ponto é movido da posição 0 na direção da posição 1, na reta real, da seguinte forma: primeiro ele atinge a posição $1/2$, depois a posição $3/4$, em seguida $7/8$, depois $15/16$, e assim por diante. No n-ésimo estágio, o ponto se encontrará na posição $1 - \frac{1}{2^n}$. Logo, é impossível chegar até a posição 1 pois, para chegar até lá, o ponto teria que percorrer uma infinidade de estágios.

Atividade 11

Você poderia mostrar que a equação anterior não tem solução? Isso implica a impossibilidade de mover o ponto da posição 0 para a posição 1?

Além disso, lembre-se da fórmula de soma dos termos de uma progressão geométrica para calcular a seguinte soma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

Você sabe a fórmula da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica? Essa fórmula só é válida para as progressões geométricas cujas razões satisfazem uma determinada condição. Qual condição é essa? A progressão correspondente ao paradoxo de Zenão satisfaz a essa condição?

Um outro paradoxo de Zenão é conhecido como *Aquiles e a tartaruga*. Aquiles, o mais famoso corredor da antiga Grécia, aposta uma corrida com a sábia tartaruga. Considerando sua morosidade, a tartaruga pede a Aquiles uma pequena vantagem: que ela possa iniciar a corrida na metade do percurso. Aquiles cede, pois corre duas vezes mais rápido que a tartaruga. Muito bem, segundo Zenão, ele perde a corrida. Na verdade, segundo Zenão, a corrida nunca mais terminará e a tartaruga estará sempre na frente de Aquiles. Isso porque, quando ele atinge o ponto de onde a tartaruga largou, a metade da raia, ela já avançou até a metade da metade que lhe faltava percorrer. Aquiles segue até esse ponto, mas a tartaruga já se encontra na metade de sua próxima etapa, e assim por diante. Resumindo, a tartaruga sempre estará na frente do magnífico Aquiles.

Note que, para o argumento funcionar como Zenão o quer, é preciso admitir que o espaço e o tempo são contínuos e o movimento é uniforme (velocidade constante). Além disso, a maneira como Zenão descreve a história sugere que Aquiles e a tartaruga passariam por uma infinidade de etapas, metade de metade, depois a metade do que faltou, e assim por diante.

Para refutar esse paradoxo, basta que lembremos da nossa concepção de movimento. Admitimos que é possível percorrer uma infinidade de posições (cada um dos pontos entre a partida e a chegada) em uma infinidade de instantes (um para cada posição), mas num intervalo limitado de tempo.

Você pode buscar os outros paradoxos de Zenão e analisá-los. Eles seguem o mesmo padrão: negação do infinito com mais algumas considerações, que implicam a não existência de movimento. Essa formulação é equivalente ao seguinte: a admissão da existência de movimento com mais algumas considerações, que implicam a existência de infinidades.

Nossa concepção admite infinidades. Numa linguagem moderna, aceitamos a fórmula matemática

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \;=\; 1.$$

Uma das dificuldades que encontramos ao tentar entender a maneira como os antigos enfrentavam os problemas matemáticos está no fato de nós, de uma certa maneira, já sabermos as soluções.

Nesta seção vamos fazer um esforço de compreender a questão da existência de segmentos não comensuráveis da maneira como ela estava colocada para os pitagóricos.

A recompensa será apreciar a genialidade de Eudoxo.

Texto 9: Eudoxo e a Teoria da Proporção

Na raiz do problema está o fato de que os gregos antigos tinham uma visão geométrica da matemática. Eles não dispunham das ferramentas algébricas que dispomos hoje, uma vez que essas só vieram a ser desenvolvidas posteriormente. A notação matemática faz uma diferença fundamental na resolução dos problemas.

Veja como podemos colocar a questão com a ajuda da Álgebra:

> Queremos comparar dois comprimentos x e y.

Suponhamos que exista um certo comprimento u tal que $x = m \times u$ e $y = n \times u$, com m e n dois inteiros. Ora, se m for maior do que n, x é maior do que y. Caso contrário, x é menor do que y.

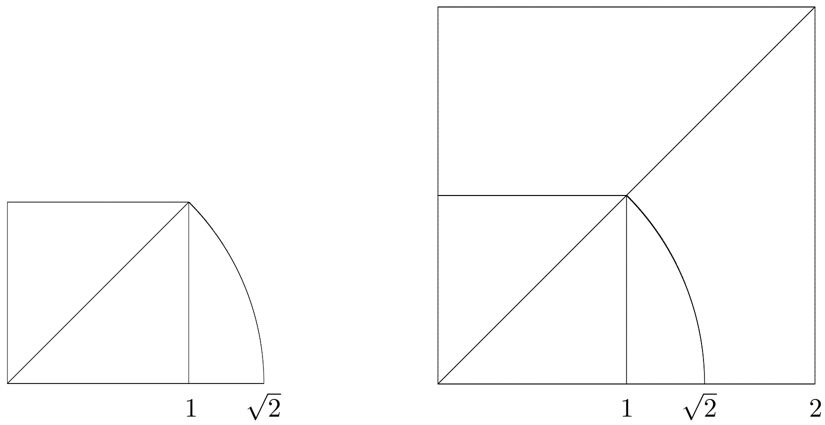
Como você sabe, os pitagóricos acreditavam que essa possibilidade ocorreria para cada par de comprimentos. Mas, como você sabe, isso não acontece para o lado e a diagonal de um dado quadrado, 1 e $\sqrt{2}$.

Portanto, nesta altura, 1 e $\sqrt{2}$ não poderiam ser comparados.

O quinto livro dos Elementos de Euclides apresenta uma teoria que resolve esta questão. A quarta definição desse livro é chamada *Axioma de Eudoxo* e foi a ele atribuída pelo grande Arquimedes. Ela diz:

> Duas magnitudes podem ser comparadas quando um múltiplo de cada uma delas for maior do que a outra.

Veja, segundo essa definição, um comprimento e uma área não são magnitudes comparáveis. No entanto, a diagonal do quadrado é maior do que seu lado e, por sua vez, é menor do que o dobro deste lado.



Assim, segundo Eudoxo, 1 e $\sqrt{2}$ são comparáveis.

Mas restava uma outra etapa, ainda mais difícil. Como definir a igualdade de duas razões de magnitudes comparáveis? Ou seja, queremos estabelecer a igualdade

> a está para b assim como c está para d.

Nós dizemos, simplesmente, a está para b assim como c está para d se, e somente se, $a \times d = c \times b$. Mas, lembre-se, os pitagóricos (assim como Eudoxo) não dispunham da multiplicação.

Note que eles já sabiam como fazer para os pares de magnitudes comparáveis. Suponha que existam magnitudes u e v, assim como números inteiros m, n, p e q, tais que $a = m \times u$, $b = n \times u$, $c = p \times v$ e $d = q \times v$. Então, dizemos que a está para b assim como c está para d se, e somente se, $m\, q = n\, p$. (É fácil multiplicar números inteiros!)

Mas, como eles poderiam estabelecer que 1 está para $\sqrt{2}$ assim como $\sqrt{2}$ está para 2?

Veja a brilhante solução de Eudoxo. Ela aparece como a quinta definição do quinto livro dos Elementos de Euclides. Em termos atuais é o seguinte:

> a está para b assim como c está para d se, e somente se, para quaisquer inteiros m e n, vale:
>
> (1) $ma < nb$ se, e somente se, $mc < nd$;
>
> (2) $ma = nb$ se, e somente se, $mc = nd$;

(3) $ma > nb$ se, e somente se, $mc > nd$.

Atividade 12

Use a definição de Eudoxo para convencer-se de que 1 está para $\sqrt{2}$ assim como $\sqrt{2}$ está para 2. Ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Observe que, nesse contexto, número inteiro quer dizer número positivo. Os números negativos só foram introduzidos posteriormente.

O mérito dessa definição está no fato de que ela permitiu que os antigos gregos dispusessem da estrutura dos números reais. O progresso feito por essa teoria só se compara aos trabalhos sobre os números reais realizados por Cauchy, Weierstrass e Dedekind, matemáticos do século 19, dos quais voltaremos a falar.

9.1 Eudoxo e a área do círculo

Nascido em 408 a.C., em Cnido, uma pequena ilha grega próxima da atual Turquia, Eudoxo estudou Astronomia, Medicina, Geografia e Filosofia, além de Matemática, com importantes mestres e em diferentes lugares por onde viajou. Estudou na Itália com Arquitas, que fora aluno de Platão. Arquitas estava interessado no problema da duplicação do cubo. Chegou a estudar na Academia de Platão, em Atenas, por um breve período. Como era muito pobre, morava em um bairro da periferia de Atenas, nas bases do monte Piraeus, zona portuária, e percorria diariamente um longo caminho de ida e volta até a escola de Platão.

Ele retornou a sua nativa ilha onde contribuiu como legislador, atuando na vida pública. Escreveu livros sobre astronomia, meteorologia e outros temas, ensinou essas disciplinas e construiu um observatório. Eudoxo morreu em Cnido, no ano 355 a.C.

Do ponto de vista matemático, como você viu, resolveu a primeira grande crise que a Matemática enfrentara. Veja, a seguir, como suas idéias resultavam em teoremas. Eudoxo demonstrou que

> a área de um círculo é proporcional ao quadrado de seu diâmetro.

Para isso, ele usou um resultado observado por Antifão, que fora o primeiro a sugerir que a área do círculo poderia ser calculada em termos de polígonos regulares nele inscritos.

Aqui está o resultado de Antifão:

> Um 2^n-ágono regular inscrito em um círculo ocupa mais do que $1 - \frac{1}{2^{n-1}}$ de sua área.

Por exemplo, um quadrado ocupa mais do que a metade da área do círculo em que está inscrito.

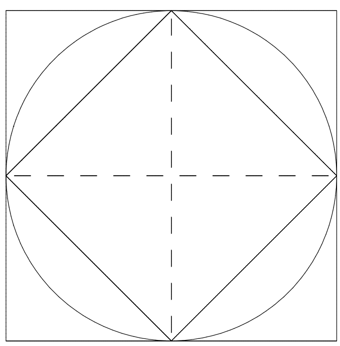
Você já tem conhecimentos suficientes para resolver o próximo exercício. Vamos a ele.

Atividade 13

Mostre que a área de um quadrado ocupa mais do que a metade da área do círculo em que ele está inscrito.

Mostre que a área de um octógono regular ocupa mais do que $\frac{3}{4}$ da área do círculo em que está inscrito.

Sugestão. Olhe para o seguinte desenho:



Agora, examinemos a argumentação de Eudoxo.

Veja, precisamos mostrar que a área de um círculo é proporcional ao quadrado de seu diâmetro. Em símbolos, devemos mostrar que existe uma constante K, tal que

$$K\,d^2 \;=\; \text{área}(C),$$

onde C é o círculo de diâmetro d.

A constante K é a mesma para *qualquer* círculo. Portanto, se aplicarmos a fórmula para o círculo de diâmetro 1, obtemos

$$K \;=\; \text{área(círculo de diâmetro } 1).$$

Atividade 14

Calcule o valor de K em termos de π.

Como você sabe, só há três possibilidades:

(a) $K\,d^2 \;<\; \text{área}(C)$,

(b) $K\,d^2 \;=\; \text{área}(C)$ ou

(c) $K\,d^2 \;>\; \text{área}(C)$.

Vamos mostrar que as possibilidades (a) e (c) levam a contradições e, portanto, só restará a possibilidade (b).

Vamos, então, supor que (a) ocorre. Ou seja,

$$K\,d^2 \;<\; \text{área}(C).$$

Agora, segundo o *Axioma de Arquimedes*, que na verdade o atribui a Eudoxo, podemos escolher um número n suficientemente grande, de tal maneira que

$$\frac{1}{2^{n-1}}\,\text{área}(C) \;<\; \text{área}(C) - K\,d^2.$$

Como n é um número grande, $1/2^{n-1}$ é suficientemente pequeno para que $\big(1/2^{n-1}\big)\,\text{área}(C)$ ainda seja menor do que a diferença (positiva)

$$\text{área}(C) - K\,d^2.$$

Podemos reescrever a desigualdade anterior na forma

$$\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{área}(C) > K\, d^2.$$

Vamos denotar por $A_n(C)$ a área do n-ágono regular inscrito no círculo C. Usando essa notação, o resultado de Antifão é

$$A_n(C) > \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{área}(C).$$

Assim, dessas duas inequações, obtemos

$$A_n(C) > \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{área}(C) > K\, d^2.$$

Paciência, estamos próximos ao fim. Antifão também sabia que $A_n(C)$, a área no n-ágono inscrito em C, é *igual* a $d^2 A_n$, (d^2 vezes A_n, a área do n-ágono inscrito no círculo de diâmetro 1).

Mas, lembre-se, K é área do círculo de diâmetro 1, portanto maior do que A_n, a área do n-ágono nele *inscrito*.

Colocando tudo isso junto, temos,

$$K\, d^2 > A_n\, d^2 \;=\; A_n(C) > K\, d^2.$$

Ora, isso é uma contradição! Portanto, a possibilidade que deu início a tudo isso, (a) $K\, d^2 \;<\;$ área(C), não ocorre.

É possível construir uma linha de argumentação que exclui, também, a possibilidade (c) $K\, d^2 \;>\;$ área(C).

Portanto, como Eudoxo afirmou,

$$K\, d^2 \;=\; \text{área}(C).$$

Nessa unidade didática você aprendeu como foi resolvida a primeira grande crise da Matemática.

Na próxima, você conhecerá um pouco mais a estrutura dos Elementos de Euclides, assim como um panorama das últimas conquistas dessa cultura que ficou conhecida com a Era de Ouro da matemática grega.

Unidade 4

O Quinto Postulado da Geometria Euclidiana

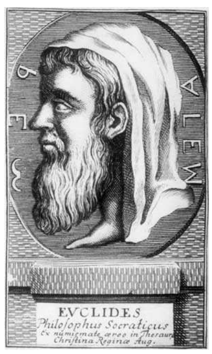
Nesta unidade didática você conhecerá uma das questões que ocupou a atenção de muitos matemáticos, desde os tempos de Euclides até os dias de Gauss, quando foi definitivamente esclarecida, de maneira surpreendente. A questão era se o Quinto Postulado, formulado por Euclides, decorreria (ou não) como conseqüência dos outros postulados.

Para entender melhor essa história, é bom aprender um pouco sobre o contexto em que surgiu a chamada geometria euclidiana.

Texto 10: Os Elementos de Euclides

Até 300 a.C., Atenas havia sido o principal pólo cultural da Antigüidade, mas essa primazia passou para uma cidade da África – Alexandria, no Egito, – que abrigou a maior biblioteca da Antigüidade. Melhor seria chamá-la *papiroteca*, pois chegou a ter em seu acervo mais de 600 000 rolos de papiro, os livros daquela época.

Neste ambiente extremamente propício para o estudo e para a pesquisa, a Matemática grega atingiu o apogeu e viveu sua era de ouro. A escola de Matemática de Alexandria foi fundada por Euclides e gerou matemáticos fabulosos, como Aristarco, Arquimedes, Apolônio e Eratóstenes.



Euclides (325 - 265 a.C.)

O núcleo do conhecimento matemático que havia sido desenvolvido pelas gerações anteriores foi compilado em uma coleção de 13 livros, todos extremamente sucintos, geralmente apresentados em um só volume, sob o título de *Elementos*. O organizador dessa obra foi Euclides.

O sucesso dessa coletânea foi tamanho que todas as outras coleções semelhantes, escritas antes dela, pereceram. Isso porque os livros eram copiados a mão e os trabalhos considerados superados não eram mais reproduzidos.

10.1 Breve descrição dos Elementos

Os seis primeiros livros dos Elementos apresentam a geometria plana. O primeiro deles começa com 23 definições, seguidas de 5 postulados e mais 5 *noções comuns* que essencialmente estabelecem a existência de objetos matemáticos e, por assim dizer, as regras do jogo. Lembre-se: postulados e noções comuns são os axiomas da teoria apresentada por Euclides, a que chamamos (muito propriamente) de geometria euclidiana.

Por exemplo, o primeiro postulado garante a existência da reta que contém dois pontos dados. Uma das *noções comuns* é a afirmação: "Coisas que são iguais à mesma coisa são iguais entre si."

O quinto postulado é chamado *Postulado das Paralelas* e difere dos quatro anteriores, por ser bem mais elaborado.

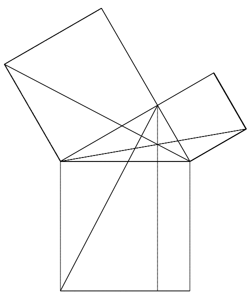


Diagrama ilustrativo da demonstração do Teorema de Pitágoras, como é apresentada nos Elementos.

Com o cenário estabelecido pelas definições, pelos postulados e noções comuns (os axiomas da teoria), são apresentadas 48 proposições. O primeiro livro é um verdadeiro *tour de force*, cujo objetivo é apresentar, justamente nas duas últimas proposições, o Teorema de Pitágoras e a sua afirmação inversa.

Caso você disponha de acesso à rede internet, poderá visitar a página www.mat.uc.pt/∼jaimecs/euclid/1parte.html e ler uma tradução para português deste primeiro livro.

O quinto livro apresenta o trabalho de Eudoxo, sobre a teoria das proporções, enquanto o livro seis as aplica à geometria plana.

A seguir, continuamos a falar sobre os Elementos, com atenção especial a números.

Texto 11: Euclides e os Números

Os livros sete, oito e nove lidam com teoria de números. Os principais resultados aí apresentados incluem:

- algoritmo de Euclides, para calcular o máximo divisor comum de dois números;
- prova de que há uma infinidade de números primos;
- prova de que todo número inteiro positivo da forma

$$n \ = \ 2^{m-1}\,(2^m - 1)$$

é um número perfeito, sempre que o número $2^m - 1$ for primo.

11.1 A infinitude dos primos

Todos nós sabemos da grande utilidade do algoritmo de Euclides e a prova de que há uma infinidade de primos é uma pérola matemática. A idéia é mostrar que, dada uma lista de números primos, sempre podemos encontrar um outro primo que não está na lista. Veja:

Dados $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$, números primos, considere o número

$$p \ = \ (p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_m) \ + \ 1.$$

que é maior do que qualquer um dos p_i.

Agora, ou p é primo, e teremos o extra primo (que não está na lista original), ou p tem fatores primos que não estão listados.

A razão é a seguinte: se algum dos primos listados originalmente for um fator de p, esse número dividiria a ambos os números $(p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_m) \ + \ 1$ e $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_m$. Portanto, dividiria a diferença entre eles, o que é um absurdo, pois essa diferença é 1 e o menor primo é o 2.

A única imperfeição nesse livro é a falta de uma demonstração rigorosa do fato conhecido como Teorema da Fatorização Única. Isto é, todo número (inteiro positivo) se decompõe, de maneira única, como um produto de fatores primos, a menos da ordem: $6 = 2 \times 3 = 3 \times 2$.

Esse teorema foi demonstrado por Gauss, muito tempo depois.

Atividade 15

Considere a lista 2, 3 e 5, de números primos, e obtenha um extra número primo usando a estratégia usada na demonstração apresentada.

Faça a mesma coisa com a lista 3, 5 e 7.

11.2 Números perfeitos

O conhecimento que os gregos tinham sobre os números mostra seu enorme interesse pela Matemática. O estudo dos números perfeitos é herança dos matemáticos pitagóricos

Um número inteiro positivo é *perfeito* se for igual à soma de seus divisores *próprios*. Por exemplo, os divisores próprios de 6 são: 1, 2 e 3. Como $1+2+3=6$, ele é um número perfeito, assim como 28 e 496.

Você pode constatar isso usando a fórmula dada por Euclides, listada anteriormente. Por exemplo, para $m=3$,

$$28 \;=\; 2^2\,(2^3-1) \;=\; 4\times 7.$$

A fórmula dada por Euclides gera números perfeitos desde que 2^m-1 seja um número primo. Portanto, uma boa pergunta seria: quando 2^m-1 é primo?

É fácil descobrir muitos casos em que esse número *não* é primo.

Usando o fato de $2^{ab}-1 \;=\; (2^a)^b-1^b$ e as fatorizações do tipo

$$\begin{aligned}
x^2-y^2 &= (x-y)\,(x+y)\\
x^3-y^3 &= (x-y)\,(x^2+xy+y^2)\\
x^4-y^4 &= (x-y)\,(x^3+x^2y+xy^2+y^3)\\
x^5-y^5 &= (x-y)\,(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)
\end{aligned}$$

obtemos

$$2^{a\,b} \;-\; 1 \;=\; (2^a-1)\big((2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+\cdots+2^a+1\big).$$

Assim, se m não é primo, então 2^m-1 também não é primo, pois pode ser fatorado por 2^n-1, para algum fator n de m.

Resta a pergunta: se m é primo, 2^m-1 é primo?

Se a resposta fosse positiva, estaria provado que há uma infinidade de números perfeitos, uma vez que há uma infinidade de números primos. No entanto, como o número $2^{11}-1$ se decompõe como 23×89, a resposta é não.

O tema dos números perfeitos e dos primos da forma $2^m - 1$ continua interessando os matemáticos até hoje. Os números da forma $2^m - 1$ são chamados números de Mersenne, em homenagem ao padre Marin Mersenne (1588 - 1648). Esse padre afirmou, no prefácio de um livro, que os expoentes

$$2, 3, 5, 7, 13, 17, 19 \text{ e } 31$$

geram números perfeitos.

A partir daí, os cálculos ficam difíceis para serem efetuados a mão, pois os números se tornam muito grandes.

Posteriormente, Leonhard Euler (1707 - 1783) provou que todo número perfeito par é da forma descrita pelos gregos, fechando essa parte da história que havia começado na Antigüidade. No entanto, vários problemas envolvendo essas questões continuam a nos desafiar até hoje. Por exemplo, mesmo com a ajuda de computadores, só conhecemos 32 números perfeitos. Além disso, não se sabe se há uma infinidade deles, assim como não se sabe se há algum número perfeito ímpar. Apesar de que, se houver algum, ele será maior do que 10^{300}.

Ainda sobre números, o décimo livro apresenta a teoria dos números irracionais, trabalho devido ao matemático Teeteto, adequado por Euclides às idéias introduzidas por Eudoxo.

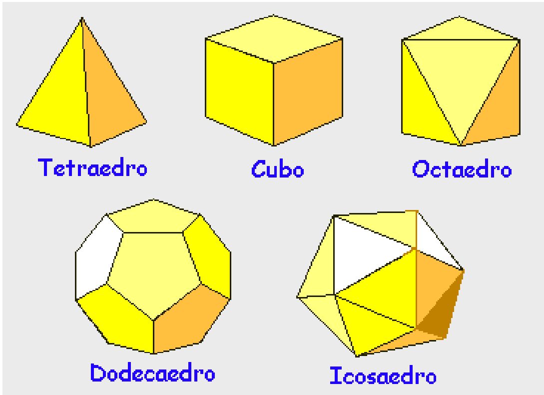
Agora, continuando o texto sobre os Elementos, vamos enfocar os últimos livros, que tratam de Geometria Espacial.

Texto 12: Geometria Espacial

O livro 11 apresenta, principalmente, as definições e fatos básicos. A proposição 2 do livro 12 foi apresentada na unidade didática anterior. É a prova dada por Eudoxo que a razão das áreas de dois círculos é igual à razão dos quadrados dos seus diâmetros. Ou seja, a área do círculo é proporcional ao quadrado do seu diâmetro.

A técnica desenvolvida por Eudoxo, chamada *método da exaustão*, também é usada para mostrar que a razão dos volumes de duas esferas é proporcional à razão dos cubos de seus diâmetros. Essa idéias seriam muito bem aproveitadas por Arquimedes.

O último livro é dedicado aos poliedros regulares, conhecidos como *Sólidos de Platão*. Por exemplo, é dada a prova de que há, precisamente, cinco desses sólidos.



Tudo indica que esse livro foi baseado num tratado sobre o assunto escrito por Theaetetus.

A clareza e precisão com que esses livros foram escritos teve grande influência no desenvolvimento posterior da Matemática. Mesmo com suas imperfeições, permanecerá como uma obra ímpar, um verdadeiro tributo aos esforços feitos pelas gerações de matemáticos que viveram a Era de Ouro da Matemática na Grécia.

Texto 13: A Questão do Quinto Postulado

O Postulado das Paralelas foi a afirmação dos Elementos que mais deu trabalho à comunidade matemática. Por muito tempo, os matemáticos tentaram provar que ele decorreria das afirmações anteriores. Ou seja, na nossa linguagem, em vez de axioma, ele seria um teorema.

Gauss foi o primeiro matemático a crer na impossibilidade de se provar que o Quinto Postulado decorreria dos quatro anteriores, como atesta uma de suas cartas enviada a um matemático chamado Franz Taurinos, em 1824.

Este fato foi demonstrado por Eugenio Beltrami (1835 - 1900) e também por outros matemáticos. Assim, os quatro primeiros axiomas mais o Postulado das Paralelas estabelecem a teoria que chamamos *geometria euclidiana* e é um ótimo modelo para a nossa realidade do dia-a-dia.

No entanto, se considerarmos os quatro primeiros axiomas e tomarmos por axioma a *negação* do Quinto Postulado, obteremos uma teoria tão consistente quanto a geometria euclidiana. Essa teoria é chamada *Geometria Hiperbólica*.

Veja bem, a geometria hiperbólica é a teoria que obtemos ao trocarmos, na geometria euclidiana, o Quinto Postulado pelo seguinte axioma:

Nikolai Ivanovitch Lobachevsky (1793 - 1856) Matemático russo que, assim como Gauss e Bolyai, considerou uma geometria sem o Quinto Postulado.

> *Axioma Hiperbólico:* Existem uma reta r e um ponto P não pertencente a r tais que pelo menos duas retas (distintas) contêm P e são paralelas a r.

Janos Bolyai (1802 - 1860), filho de um matemático, descobriu, independentemente de Gauss e Lobachevsky, a existência da geometria hiperbólica.

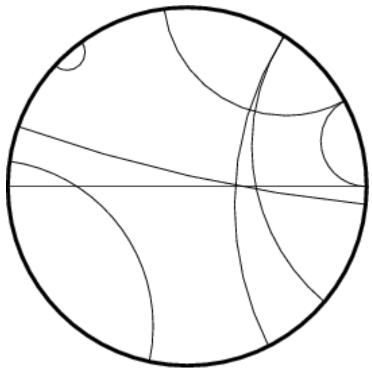
Os primeiros matemáticos a produzirem resultados nessa nova área matemática foram Nikolai Ivanovitch Lobachevsky e Janos Bolyai. A comunidade matemática custou a aceitar e a entender essas novas idéias e tanto Lobachevsky quanto Bolyai ficaram sem receber, em seu tempo, os méritos por seus feitos. Uma possível razão para isso pode ter sido o fato de que os teoremas nessa nova geometria são muito estranhos, se comparados com os similares da geometria euclidiana. Nesse contexto, o Teorema de Pitágoras é falso, assim como a fórmula da distância que conhecemos da geometria analítica. Foi difícil para a comunidade acostumar-se com o fato de duas retas poderem estar tão próximas quanto quisermos, sem ter qualquer interseção.

Em 1868, Beltrami conseguiu um modelo euclidiano para a geometria hiperbólica. Isso, mais um resultado provado por Lobachevsky, mostra que a geometria hiperbólica é consistente se, e somente se, a geometria euclidiana é consistente.

Em 1882, Henri Poincaré construiu um segundo modelo euclidiano para a geometria hiperbólica, usando idéias que remontam a Apolônio, um dos grandes matemáticos do passado, ligado à escola de Matemática de Alexandria.

Este modelo para a geometria hiperbólica é conhecido como *disco de Poincaré*, no qual as retas são representadas por arcos de círculos cujos extremos são perpendiculares ao bordo do disco.

Henri Poincaré (1854 - 1912) foi um matemático extraordinário. Deu contribuições em diversas áreas da matemática, especialmente na Topologia, uma área que ganhou grande importância ao longo do século 20. Nessa área ele propôs a chamada *Conjectura de Poincaré*, um problema que atravessou o século dando trabalho aos melhores matemáticos do mundo. Em 2003, o russo Grigori Perelma apresentou uma solução para o problema. Se a sua solução for aceita pela comunidade, ele pode ganhar um prêmio de um milhão de dólares.

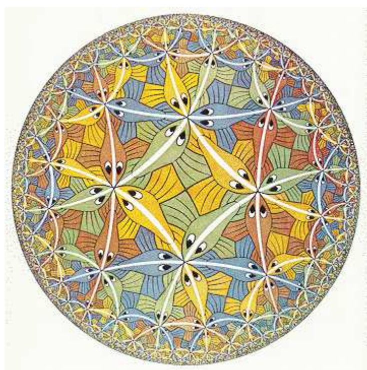


Os diâmetros do disco também são considerados retas. Dois arcos que não se intersectam representam duas retas paralelas. Isso inclui os arcos que se intersectam no bordo, pois o modelo considera apenas o interior do disco. Como você já deve estar imaginando, retas perpendiculares são arcos que não se intersectam.

Há, também, um modelo que usa, no lugar do disco, um semiplano. Neste caso, as retas são as semi-retas perpendiculares ao bordo e semicírculos cujo centro pertence ao bordo. Dessa forma, as extremidades desses semicírculos intersectam o bordo do semiplano ortogonalmente. Nessa geometria, a soma dos ângulos internos de um triângulo é *menor* do que 180°, e pode variar de triângulo para triângulo. Além disso, triângulos com os mesmos ângulos têm as mesmas áreas.

Assim, o Quinto Postulado é o axioma que caracteriza a geometria euclidiana. Mudanças nessa afirmação geram outras teorias, que são chamadas *geometrias não-euclidianas*. A Geometria Hiperbólica é uma delas.

Observe como a gravura do artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher, a seguir, lembra esse tipo de geometria.



Um outro exemplo de geometria não-euclidiana é a chamada *geometria elíptica*, e foi estudada por Riemann. Essa geometria pode ser vista como a superfície de uma esfera, na qual as retas são os grandes círculos. Nessa geometria, a soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que 180°.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) contribui profundamente para o avanço da Matemática contemporânea, graças a sua enorme criatividade. Riemann foi, entre outras coisas, o precursor do conceito de *variedade diferenciável*. Essa noção permite levar as idéias do cálculo diferenciável a um nível de abstração muito elevado e tem aplicações em muitas áreas além da Matemática.

Você já estudou bastante até aqui. Faça uma interrupção na leitura e procure realizar a atividade que propomos.

Atividade 16

Usando o modelo de Poincaré, para a geometria hiperbólica, e o modelo da esfera com grandes círculos, para a geometria elíptica, desenhe triângulos e comprove que a soma de seus ângulos internos é menor do que 180°, no caso da hiperbólica e maior do que 180°, no caso da elíptica.

Texto 14: Crepúsculo Dourado de uma Época

Entre os nomes famosos associados à escola de Alexandria estão Aristarco (310 - 250 a.C.) e Eratóstenes (275 - 195 a.C.), que, além de matemáticos, também eram astrônomos.

Aristarco considerava verdadeiras as seguintes afirmações sobre o sistema solar:

- a lua, a terra e o sol são corpos esféricos;
- a terra gira em torno do sol e a lua gira em torno da terra;
- os raios solares viajam em linhas retas;
- a lua reflete a luz solar.

Os eclipses solares ocorrem quando a lua passa entre a terra e o sol, bloqueando a luz solar e os eclipses lunares ocorrem quando a terra passa em frente ao sol, projetando sua sombra sobre a lua.

Você pode ver que, para a época, Aristarco tinha uma visão bastante correta do sistema solar. Muito bem, usando esses fatos, sem qualquer artefato como uma luneta ou um telescópio, ele calculou a razão da distância da terra até o sol pela distância da terra até a lua.

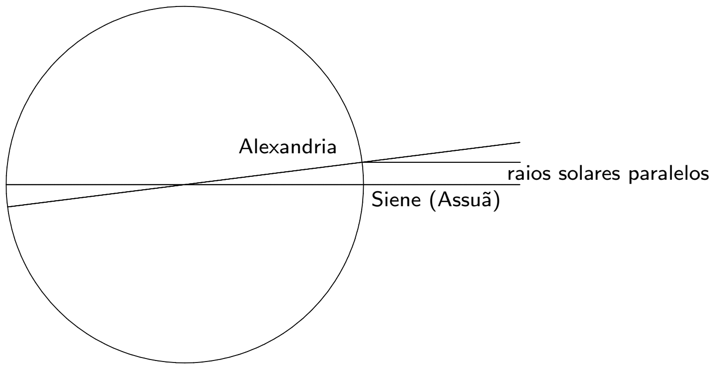
A idéia é a seguinte: quando a lua está na sua fase quarto crescente, pode ser vista no céu simultaneamente com o sol e o triângulo de vértices sol, lua e terra é um triângulo retângulo.

Medindo o ângulo $\angle LTS$, Aristarco pôde calcular a razão TS/TL, desenhando um triângulo semelhante.

Feito grandioso, também, foi o de Eratóstenes: mediu o raio da terra. Para isso, usou seus conhecimentos de geografia. Primeiro, considerou que os raios solares atingem paralelamente a terra, pois o sol está tão distante que, ao fazer isso, estaria cometendo um erro desprezível.

Eratóstenes sabia, por ter lido em textos conservados na biblioteca de Alexandria, que a cidade de Siene (atualmente incorporada em Assuã) se encontrava exatamente sobre o Trópico de Câncer. Isso porque no dia 21 de junho, o solstício de verão, o sol do meio-dia iluminava as águas de um poço profundíssimo. Sabia, assim, que nesse momento o sol incidia perpendicularmente sobre essa cidade. Então, Eratóstenes procurou saber qual seria a posição do sol, no mesmo dia e instante, sobre a cidade de Alexandria.

Para isso, mediu a sombra de um obelisco e concluiu que os raios solares e o obelisco formavam um ângulo de 7° $1/5$, a quinquagésima parte de um círculo.



Portanto, o ângulo formado pelo raio solar e pelo obelisco, que está na direção do diâmetro da terra que passa por Alexandria, é o mesmo ângulo do setor circular cujo arco tem extremidades em Siene (Assuã) e Alexandria.

Conta a lenda que ele pagou a um escravo para medir a distância de Alexandria até Siene (Assuã), que é de 800 km. De posse dessas informações e usando geometria elementar, calculou a circunferência da terra:

$$\frac{360^\circ}{7^\circ 1/5} \times 800 = 40\,000 \text{ km}.$$

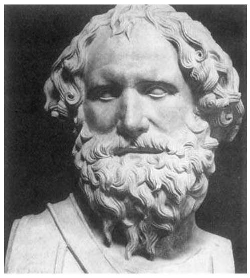
Assim, chegou ao raio da terra: 6 366, 2 km. Impressionante, não é?

Texto 15: Eureka!

Muito bem, Eratóstenes foi grande amigo de Arquimedes, possivelmente o maior matemático da Antigüidade. Várias coisas que sabemos a respeito das conquistas científicas feitas por Arquimedes devemos a cartas que ele escreveu para Eratóstenes. Eles se conheceram em Alexandria, onde Arquimedes estudou.

Nesse ponto, cabe a pergunta: o que torna alguém como Arquimedes tão genial? o que o distingue de seus pares, eles mesmos tão elevados, como Aristarco, Eratóstenes e outros?

A originalidade é, certamente, um fator que indica essa distinção. Arquimedes a teve de sobra. Outra é o reconhecimento de sua genialidade pelos outros matemáticos. As obras de Arquimedes foram estudadas e citadas por muitos grandes matemáticos, de diferentes épocas e diferentes culturas. Mas, há uma coisa mais que o torna ímpar. Arquimedes dominou todo o conhecimento matemático de sua época, o fez seu e o moldou à sua maneira. Não se deixou prender pelas imposições conservadoras que limitavam os métodos e as soluções aos problemas matemáticos de seu tempo.



Arquimedes (287 - 212 a.C.) nasceu e morreu na cidade de Siracusa, atualmente na Sicília. Filho de um astrônomo chamado Fídeas, foi enviado à Alexandria onde estudou. De volta a sua cidade participou ativamente da vida da corte e produziu uma quantidade enorme de resultados matemáticos e científicos. Arquimedes era o modelo do cientista distraído, que vivia envolto em seus pensamentos, como atestam várias anedotas. A mais pitoresca conta como saiu tempestuosamente de uma banheira gritando eureka! eureka! pela rua, sem se dar conta de sua nudez. Eureka quer dizer achei, encontrei! Arquimedes acabara de ter uma idéia de como resolver o famosos problema da coroa do rei Hierão.

A influência de Platão na maneira de pensar dos matemáticos daquele tempo fora frutuosa, culminando na produção dos Elementos, que têm um papel fundamental na nossa maneira de pensar a Matemática até hoje. A idéia de verdade absoluta que a Matemática busca expressar, apesar de ser apenas a sua sombra. No entanto, essa atitude também traz uma forte limitação. Veja, o problema de dividir um dado ângulo em três partes iguais, por exemplo, não tem solução no âmbito das regras estabelecidas pelos axiomas fixados por Euclides: construções com régua e compasso. No entanto, o problema tem solução, se admitirmos outros métodos, que podemos chamar de *mecânicos*. Muito bem, Arquimedes rompeu com essas limitações, estudou e usou essas novas idéias com o mesmo rigor que caracterizou os trabalhos das gerações anteriores. Mais ainda, Arquimedes aplicou esse rigor científico no estudo da Física, da Mecânica, criando novidades que usamos até hoje, como o sistema de bombeamento, chamado *Parafuso de Arquimedes*, e os seus conhecimentos sobre alavancas e polias, para mover grandes pesos.

15.1 Arquimedes e a área do círculo

Para descrever, mesmo rapidamente, os resultados obtidos por Arquimedes, levaríamos mais de uma unidade didática, fugindo do propósito desse nosso trabalho. Mas, para que você aprecie um pouco de sua produção matemática, veja como ele provou que a área do círculo de raio r é πr^2.

Veja a belíssima aproximação de π, dada por Arquimedes:

$$3 + \frac{10}{71} \ < \ \pi \ < 3 + \frac{1}{7}$$

Essa desigualdade reflete, até a terceira casa decimal, a desigualdade $3.140 \ < 3.141 \ < \ 3.142$. Impressionante, não?

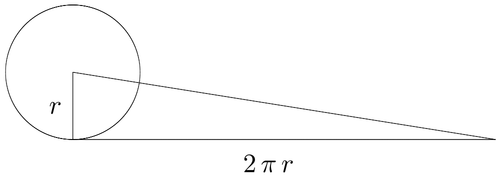
Muito bem, Arquimedes chegou a essa aproximação a partir da seguinte afirmação, tomada como verdadeira por ele:

> Dado um círculo qualquer, há um segmento de reta que é mais comprido do que o perímetro de qualquer polígono convexo nele inscrito e mais curto do que o perímetro de qualquer polígono convexo circuscrito no círculo. Qualquer outro segmento que satisfaça essa propriedade tem o mesmo comprimento. Esse comprimento é igual à circunferência deste círculo.

Na primeira parte da afirmação ele caracteriza a circunferência do círculo e na segunda estabelece a sua unicidade. Existe e é único, como gostamos de dizer em Matemática.

Arquimedes partiu do ponto deixado por Eudoxo – a área de um dado círculo é proporcional ao quadrado de seu diâmetro – para provar, usando o método de exaustão, que:

a área do círculo é igual à área do triângulo retângulo cujos catetos são o seu raio e a sua circunferência.



A demonstração segue a mesma linha de raciocínio usada por Eudoxo para provar a proporcionalidade (ver a unidade anterior), considerando separadamente as possibilidades de a área do círculo ser maior do que a área do triângulo, o que leva a um absurdo, assim como a possibilidade de ser menor.

O episódio da morte de Arquimedes é coberto por um pouco de lenda, que ajuda a reforçar a imagem do cientista imerso em seus pensamentos, desligado do mundo real. Segundo consta, ele morreu por não ter respondido ao chamado de um soldado romano, por estar profundamente envolvido com um problema de geometria. É difícil crer que um homem que esteve tão atento às necessidades de seus conterrâneos, que tenha tido tantas idéias práticas, não tenha percebido a aproximação e o chamado do soldado.

É bom lembrar que as invenções bélicas de Arquimedes haviam afligido e causado muitas baixas entre os soldados romanos que cercavam Siracusa, no intuito de tomá-la. É bom lembrar que Marcellus, o general romano que comandava o cerco de Siracusa, dera ordens expressas para que a vida de Arquimedes fosse poupada.

De qualquer forma, o episódio nos lembra que a época de ouro dos gregos estava chegando ao fim. Outras civilizações surgiam e o poder mudava de mãos.

A cultura grega ainda continuaria a exercer sua influência, como o faz até os nossos dias, mas era tempo para novas idéias e novas contribuições.

Alguns nomes importantes para a Matemática ainda continuaram a aparecer, como Apolônio, contemporâneo de Arquimedes, com seu tratado monumental (mais de 400 teoremas) sobre as cônicas. Houve também Hiparco, que tanto contribuiu para a fundamentação do que chamamos trigonometria, Menelau *de Alexandria, já na era cristã, que fundamentou a trigonometria esférica, o neo-pitagórico Nicomaco de Gerasa.*

Outro grande matemático foi Diofanto, que viveu já no terceiro século da era cristã, e dedicou-se à teoria de números. Diofanto escreveu uma série de 13 livros cujo conjunto era intitulado Aritmética, dos quais conhecemos nove (seis até 1973, quando mais três foram descobertos, em tradução árabe).

A importância de Diofanto reside, também, no fato de ter sido o primeiro matemático a usar uma notação simbólica para expressões algébricas. Isso lhe rendeu, com justiça, o título de "pai da Álgebra". Mas como álgebra é uma palavra proveniente do árabe, deixaremos essa história para a próxima unidade didática.

Aqui estão mais algumas atividades que o convidam a entrar, pelo menos um pouco, no universo da Matemática daqueles dias.

Atividade 17

Suponha que uma coroa de m kg tenha sido feita usando uma mistura de ouro e prata. Se a densidade do ouro for denotada por γ e a densidade da prata for denotada por σ, o volume da coroa é dado por:

$$v = \frac{x}{\gamma} + \frac{m-x}{\sigma},$$

onde x é o peso (em quilogramas) de ouro usado na coroa.

Conhecendo a massa da coroa (5 kg, segundo consta a história, Hierão tinha um pescoço fortíssimo), como Arquimedes descobriu a quantidade certa de ouro e prata usados para fazer a coroa?

Atividade 18

Considere o triângulo de números a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \end{array}$$

Voce é capaz escrever a próxima linha? e a outra?

Some os números de cada uma dessas linhas. O que você pode observar?

Muito bem, esse triângulo aparece no livro *Introdução à Aritmética*, escrito por Nicomaco, no qual ele nota que a soma dos números na n-ésima linha é n^3.

Atividade 19

Uma das questões que interessava a Diofanto era a seguinte: escreva um dado número, que é a soma de dois quadrados, como a soma de outros dois quadrados.

Por exemplo, 65 é a soma de 64 com 1, dois quadrados.

Você seria capaz de escrever 65 como a soma de outros dois quadrados?

Bem, a resposta de Diofanto é a seguinte:

> 65 se escreve como a soma de dois quadrados de maneiras diferentes pois é o produto de 13 por 5, sendo cada um deles a soma de dois quadrados.

Será que Diofanto conhecia a identidade algébrica

$$(a^2 + b^2)\,(c^2 + d^2) \;=\; (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2?$$

Unidade 5

Resolução das Equações Algébricas

Muito bem, continuando a História da Matemática, você conhecerá como ocorreu a transição entre o período de ouro da matemática grega para a época do renascimento cultural e científico vivido na Europa no século 16.

Durante toda a Idade Média, o conteúdo matemático alcançado pelos gregos foi preservado e enriquecido pelos árabes.

É um longo capítulo da História da Matemática marcado pelo respeito que a cultura árabe teve pelos resultados obtidos anteriormente.

Mas não foi só isso, neste período também ocorreram grandes contribuições de matemáticos indianos.

Texto 16: Há Mouros na Costa!

Uma das maneiras de perceber a influência de uma certa cultura em nossas vidas é a presença de suas palavras no dia-a-dia.

> Azeite, alfazema, beringela, algarismo, mesquinho, arroz, decifrar, algarve, laranja, zero, alicate, javali, oxalá, refém, até, alicerce...

Responda depressa: o que todas essas palavras têm em comum?

Acertou quem disse: são todas provenientes do árabe!

Elas chegaram até o nosso idioma devido à ocupação da Península Ibérica pelos árabes, que resultou num período de convivência de duas culturas.

Com o declínio das civilizações grega, e depois romana, foi a vez dos árabes se expandirem. Em 711 eles cruzaram o Estreito de Gibraltar e ocuparam Córdoba e Toledo, na Espanha. Até o século 12 permaneceram também em território português e só saíram de Granada, na Espanha, em 1492.

Tinham uma cultura rica e eram capazes de absorver e transformar os conhecimentos dos povos que dominavam ou das culturas com que mantinham contato. Por exemplo, conhecemos o livro do astrônomo grego Cláudio Ptolomeu, escrito no século 2, por *Almagesto*, devido à sua tradução árabe. Além disso, os árabes usaram idéias gregas para construir o astrolábio, que permitiu maior segurança na navegação.

Os livros sobre medicina, escritos por Al Razi (864 - 930) e Avicena (980 - 1037), foram usados na Europa até o século 17. Mais ainda, os árabes difundiram o uso do papel no lugar do papiro, que eles trouxeram da China. Isso tornou a produção de livros mais barata, facilitando a difusão de conhecimento.

Como os árabes eram originários de regiões de clima inóspito, tinham grande conhecimento sobre irrigação e semeadura.

Além de tudo isso, o amor que tinham pela abstração e pelos números deixou uma marca forte na Matemática. Da Índia trouxeram o zero, aperfeiçoaram os *algarismos* e contribuíram para a parte mais abstrata da Matemática, que leva um nome árabe – a Álgebra.

Mas, vamos começar falando de um número muito especial – o zero.

Texto 17: Decifrando o Zero

A maioria dos nossos alunos ficaria surpresa ao saber quanto tempo demorou para que o zero se estabelecesse no cenário matemático. Para entender um pouco melhor essa história, é preciso lembrar que o zero tem duas funções a desempenhar no sistema numérico. Veja, usamos o zero para expressar certos números, uma vez que nosso sistema numérico é *posicional*. Assim, os números 272, 2720 e 2072 podem ser diferenciados uns dos outros. A outra função é ser um número em si mesmo.

Já os babilônios usavam um sistema numérico posicional, mas mesmo assim o zero não se estabeleceu nessa cultura. Também alguns gregos, astrônomos, usavam um sistema numérico posicional, mas isso ficou restrito a um número muito pequeno de pessoas.

O zero se estabeleceu, definitivamente, como um símbolo para representar números num sistema posicional, na Índia. Inscrições que datam do ano 876 descrevem um problema (sobre plantações de flores, para a produção de guirlandas) em que os números 270 e 50 são denotados como o fazemos hoje.

Já sua outra função, como número, deu mais trabalho aos matemáticos. Foi um longo caminho do concreto para o abstrato. Veja, partir de idéias tais como quatro irmãos, quatro objetos, para chegar à idéia do número 4, exige um enorme esforço de abstração. Daí para o zero, que representaria o nada, assim como números negativos, exige uma maior abstração. Como se isso não fosse o bastante, há ainda a questão de *estender* a esses *novos números* a aritmética já estabelecida para os positivos.

Bhaskara (1114 - 1185) é o nome que associamos a fórmula que resolve a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ele também era conhecido por Bhaskaracharya, que significa Bhaskara, o professor.

Alguns matemáticos da Índia definiram regras para as operações aritméticas envolvendo números positivos, zero e números negativos. Primeiro Brahmagupta e depois Mahavira e, perto de 500 anos depois de Brahmagupta, Bhaskara. Tudo funcionou bem, a menos da operação de divisão, onde eles tentavam estabelecer o resultado de uma divisão por zero.

Bhaskara tentou resolver o problema da seguinte forma:

> Uma quantidade dividida por zero se torna uma fração cujo denominador é zero. A essa fração é atribuída uma quantidade infinita. Esta quantidade (aquilo que tem zero como seu divisor) não é alterada, independentemente de quanto a ela seja acrescentado ou subtraído, assim como não há mudanças no infinito e imutável Deus quando mundos são criados ou destruídos, apesar de inúmeras ordens de seres serem absorvidos ou criados.

Em 1655, por sugestão de John Wallis, um dos precursores do Cálculo, o símbolo ∞ passou a ser usado para indicar infinito. Anteriormente era usado como uma alternativa para M, que representa $1\,000$ em algarismos romanos.

Usando a notação atual, Bhaskara estava tentando resolver o problema colocando

$$\frac{n}{0} = \infty.$$

Por mais tentadora que pareça essa solução, ela acarreta vários problemas. Primeiro, introduz um *número* extra, o ∞. Isso já condena a fórmula. Mas, o pior ainda está por vir, pois ela implica que $0 \times \infty$ é igual a qualquer número n, provocando a contradição de que todos os números seriam iguais.

É difícil crer que a solução para o problema seja tão simples: basta estabelecer que *não se divide por zero*, e pronto! De qualquer forma, esta questão afeta muitos iniciantes na Matemática, até hoje. Precisamos lembrar nossos alunos constantemente que não se divide por zero.

Estender certas definições tais como elas valem para um dado conjunto de objetos matemáticos, para um conjunto maior, pode ser uma dura tarefa. Esse foi, de certa forma, o problema enfrentado pelos matemáticos da Índia, quando tentavam definir as operações aritméticas, conhecidas para o caso de números positivos para incluir o zero e os negativos.

Veja a atividade.

Atividade 20

Veja o que está errado com a seguinte prova de que 1 é igual a 2:

$$\begin{aligned} 1 &= 1+0+0+0+\ldots = \\ &= 1+(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = \\ &= 1+1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = \\ &= 1+1+0+0+0+\ldots = \\ &= 2. \end{aligned}$$

Seria possível definir uma adição que incluísse uma infinidade de parcelas?

A representação dos números por um sistema posicional, que demanda dez algarismos, *bem como as regras que definem as operações básicas da Aritmética, envolvendo o zero e números negativos, é um importante avanço matemático que foi transmitido para a cultura árabe e, posteriormente, para as culturas européias.*

Os algarismos hindu-arábicos, com o sistema numérico posicional e as frações decimais, são provas de que nossa cultura deve muito aos esforços das gerações anteriores. De qualquer forma, esse sistema não foi rapidamente absorvido e, por muito tempo, o sistema posicional e o sistema numérico representado por letras conviveram lado a lado.

Hoje, essa maneira antiga de denotar os números tem uma presença residual.

Algo assim como uma passagem do analógico para o digital. Falando nisso, que horas são?

É claro que está na hora de passarmos à Álgebra.

Texto 18: A Álgebra Surge no Cenário Matemático

Abu Jafar Mohamed ibn Musa al-Khwarizmi foi o primeiro matemático da *Casa da Sabedoria*, uma espécie de universidade fundada pelo califa al-Mamum, no início do século 9, em Bagdá. Ele escreveu um livro sobre matemática elementar: uma compilação de regras para solução aritmética de equações lineares e de segundo grau, baseado nos trabalhos de Diofante, chamado *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*. A palavra árabe *al-jabr* significa *combinar, reunir*, e a tradução latina desse título deu origem à palavra álgebra. O livro inicia com uma frase do tipo "Assim falou al-Kwarizmi... ", cuja tradução latina resultou no termo *algoritmo*.

De qualquer forma, a semente estava lançada. Também entre os matemáticos da Índia floresceu a Álgebra. Com a introdução da teoria de números negativos, Brahmagupta (598 - 670) podia dar a solução completa para equações lineares diofantinas, do tipo

$$4x + 6y = 2.$$

Esse tipo de equação só tem solução (inteira) se o m.d.c. (maior divisor comum) dos coeficientes (4 e 6) dividir o termo constante (2).

Resolva o seguinte problema, proposto por Brahmagupta.

Atividade 21

Em quanto tempo quatro fontes, todas abertas ao mesmo tempo, encherão uma cisterna, as quais sozinhas a encheriam num dia, em meio dia, num quarto de um dia e num quinto de um dia?

Bhaskara, como já vimos, é um matemático da Índia, cujo nome permanece até hoje. Como era comum em sua época, ele redigia os problemas propostos de forma poética. Veja um exemplo.

> De um enxame de abelhas pretas, a raiz quadrada da metade voou para um jasmineiro e oito nonos das abelhinhas ficaram para trás. Sobraram duas, uma femeazinha voando em torno de uma flor de lótus, cuja fragrância acabou capturando um zangão, que lá ficou a zunir. Então, diga-me tão encantadora garota, quantas abelhas havia no enxame todo?

É claro que tal enunciado é mais interessante do que simplesmente:

$$\text{Resolva a equação } \sqrt{x/2} + (8/9)x + 2 \;=\; x.$$

Bhaskara tinha uma filha chamada Lilavati, cujo nome foi dado a um de seus livros. Ela deve ter sido uma boa aluna de Matemática.

Veja mais um problema típico do Lilavati.

> Oh, sábio homem! Um certo rei deu a cinco cavaleiros 57 moedas. Cada um, por ordem, obteve o dobro e mais uma moeda do que o seu antecessor. Quantas moedas obteve o primeiro cavaleiro, assim como cada um dos outros?

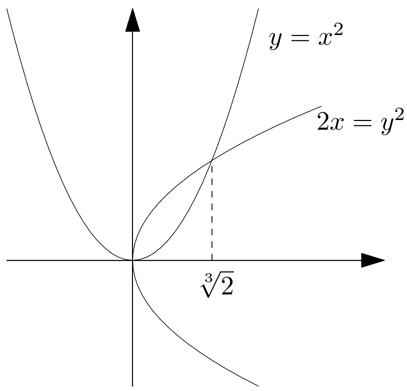
Mas, voltemos aos árabes, conhecendo um pouco do trabalho de Omar Khayyam referente às equações cúbicas. Antes, contudo, faremos uma introdução apresentando um resumo histórico dessas equações.

18.1 Omar Khayyam e as equações cúbicas

Problemas cuja solução recaía numa equação cúbica já eram conhecidos desde a Antigüidade. No entanto, o completo entendimento dessas equações levou bastante tempo. O exemplo mais famoso é a questão da duplicação do cubo.

Veja, os gregos já haviam notado que, se fosse possível construir comprimentos y e z tais que $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{2}$, o problema da duplicação do cubo estaria resolvido.

Em outras palavras, se além de régua e compasso fossem admitidas soluções através de desenhos de parábolas (uma curva obtida por um processo *mecânico*), o problema estaria resolvido com o seguinte diagrama:



Muito bem, chegamos a Omar Khayyam (1050 - 1123), que, além de poeta, foi matemático. A lenda conta que ele e mais dois amigos, Nizan e Hassan, fizeram um pacto, de que se algum deles ficasse rico, dividiria suas riquezas com os demais. Ao que parece, Nizan ficou muito rico e, graças a isso, Omar pôde deixar seu ofício como artesão de tendas, razão do nome Khayyam, para se dedicar à Matemática. Ele dedicou sua atividade matemática a estudar a equação cúbica

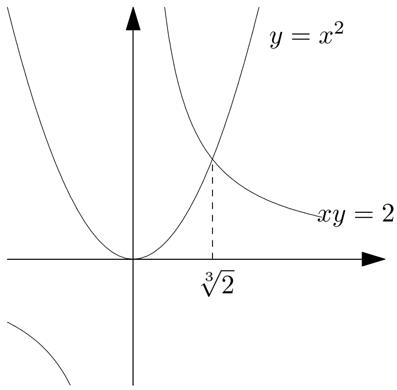
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Khayyam considerava diversos casos, dependendo dos sinais dos coeficientes da equação e usava interseções de cônicas para determinar soluções positivas, assim como no caso da solução de $x^3 = 2$, dada anteriormente.

Em resumo, lidava com casos especiais do seguinte simples resultado.

Teorema: O ponto (x, y) é solução de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ e $y = x^2$ se, e somente se, é solução de $(x + a)(y + b) = ab - c$ e $y = x^2$.

Por exemplo, para resolver a equação $x^3 - 2 = 0$, Omar considera a interseção da parábola $y = x^2$ e a hipérbole $xy = 2$.



Bem longe de Khayyam, um matemático italiano se ocupa com o sistema numérico árabe e lida com equações cúbicas.

18.2 Fibonacci e seus coelhos

O ano de 1202 assistiu à publicação de um livro chamado *Liber Abaci* (*Livro dos Ábacos*), que apresentaria para a Europa o sistema numérico árabe. Esse livro fora escrito por um matemático genial, Leonardo de Pisa, mais conhecido pelo apelido de Fibonacci. Ele aprendera Matemática na Algéria, onde fora acompanhando seu pai, um funcionário diplomático. Um dos problemas apresentados no livro é o que gera a famosa seqüência de Fibonacci. Veja o enunciado:

> Suponha que as coelhas demorem um mês para gerar suas crias e que cada coelha fique prenha no início de cada mês, contando do início de seu primeiro mês de vida. Além disso, suponha que cada coelha gere um par de coelhos, um macho e uma fêmea. Quantos pares de coelhos você terá em 2 de janeiro de 1203 se você começar com um só par, em 1 de janeiro de 1202, se em cada mês cada par gera um novo par, que se torna produtivo a partir do segundo mês?

A solução dada por Fibonacci é a seguinte: no primeiro mês, teremos um par de coelhos que se manterá no segundo mês, tendo em consideração que se trata de um casal de coelhos jovens; no terceiro mês de vida darão origem a um novo par, e assim teremos dois pares de coelhos; para o quarto mês só temos um par a reproduzir, o que fará com que obtenhamos, no fim deste mês, três pares. Em relação ao quinto mês, serão dois os pares de coelhos a reproduzir, o que permite obter cinco pares de coelhos no fim deste mês. Continuando desta forma, ele mostra que teremos 233 pares ao fim de um ano de vida do par de coelhos com que partimos.

Assim, o número de coelhos aumenta da seguinte maneira:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

caso o processo não seja interrompido. Veja, a seqüência de Fibonacci pode ser obtida da seguinte maneira.

$$F_1 = 1; \; F_2 = 1; \; F_{n+1} \; = \; F_n + F_{n-1}.$$

O último número da seqüência, a partir do terceiro, é a soma dos dois números anteriores, sendo que os dois primeiros números são iguais a 1.

Há muita informação sobre os números de Fibonacci na literatura, inclusive sobre suas relações com a razão áurea.

18.3 Fibonacci e a cúbica

A vida dos matemáticos nos dias de Fibonacci não era nada fácil. Nada de posições asseguradas em universidades, nada de aposentadoria ou outros benefícios. A competência era a principal segurança de cada um. Era comum que fossem organizados torneios matemáticos nos quais as habilidades eram testadas. Além disso, um matemático podia desafiar um outro para uma espécie de duelo matemático. Eles trocavam listas de problemas e o vencedor do desafio, aquele que resolvesse o maior número de problemas, mantinha a sua posição sob ou ocupava o lugar do vencido, dependendo do caso.

Nesse clima de competição, as respostas dos problemas eram apresentadas, mas os métodos usados para obtê-las eram segredos guardados sob sete chaves.

Os problemas mais difíceis que circulavam naquela época eram aqueles que demandavam a resolução de uma equação de grau três, as chamadas equações cúbicas, ou simplesmente cúbicas, para os íntimos.

Frederico II era o imperador romano, coroado pelo Papa Honório III em novembro de 1220 na Igreja de São Pedro, em Roma. O Imperador foi, também, entre 1197 e 1250, Rei da Sicília, e era um monarca culto, protetor das artes e das ciências.

Em 1225, Frederico II organizou um torneio que foi vencido de maneira brilhante por Fibonacci. Ele simplesmente resolveu todos os problemas propostos.

Um desses problemas consistia em resolver a equação

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20.$$

Veja, se substituirmos x por 1 no lado esquerdo da igualdade, obtemos $1+2+10 = 13 < 20$. Além disso, se multiplicarmos a equação por $\frac{1}{10}$, obtemos

$$x + \frac{x^3}{10} + \frac{x^2}{5} = 2.$$

Essas considerações indicam que a solução está entre 1 e 2.

Fibonacci constatou alguns fatos sobre a natureza da solução, por exemplo provando que ela não é um número racional, e afirma que

$$x \cong 1^\circ\ 22'\ 7''\ 42'''\ 33^{IV}\ 4^{V}\ 40^{VI},$$

ou seja,

$$x \cong 1 + \frac{22}{60} + \frac{7}{60^2} + \frac{42}{60^3} + \frac{33}{60^4} + \frac{4}{60^5} + \frac{40}{60^6},$$

que dá $x \cong 1.368808108$.

O que você acha de tentar resolver o problema de Fibonacci?

Atividade 22

Usando o método geométrico, desenhe cuidadosamente as curvas

$$(x+2)(y+10) = 40 \text{ e } y = x^2.$$

Muito bem, você já sabe que é difícil achar solução para uma cúbica. Veja a diferença com o caso das equações quadráticas. No caso de $ax^2+bx+c=0$, basta usar a fórmula de Bhaskara,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Mas havia casos onde as soluções encontradas eram mantidas em segredo.

Texto 19: Um Grande Segredo

A busca de uma fórmula semelhante para o caso das cúbicas, e demais equações de maior grau, era a grande questão que ocupava os matemáticos naqueles dias.

O primeiro matemático a encontrar uma fórmula que se aplica a um certo tipo de cúbica foi Scipione dal Ferro (1465 - 1526). Ele descobriu como resolver as chamadas *cúbicas comprimidas* Isso é, equações da forma

$$y^3 + Ay = B,$$

com A e B positivos.

Scipione descobriu que, neste caso, bastava determinar s e t tais que

$$\begin{cases} 3\,st & = & A, \\ s^3 - t^3 & = & B, \end{cases}$$

pois $s - t$ é solução de $y^3 + Ay = B$. Realmente, basta substituir. O problema é determinar s e t. Muito bem, a questão é algébrica! Basta resolver a equação $3\,st = A$ em s, obtendo $s = \dfrac{A}{3t}$ e substituir em $s^3 - t^3 = B$. Isso dá $\left(\dfrac{A}{3t}\right)^3 - t^3 = B$. Um pouco mais de trabalho e obtemos a equação

$$t^6 + B\,t^3 - \frac{A^3}{27} \ = \ 0$$

que pode ser resolvida em t^3 pela equação de Bhaskara. Ufa! e essa é apenas a cúbica comprimida. Veja um exemplo... Para resolver a equação $y^3 + 6y - 10 = 0$, fazemos $y^3 + 6y = 10$ e colocamos $\begin{cases} 3\,st & = & 6 \\ s^3 - t^3 & = & 10. \end{cases}$

Fazendo as substituições indicadas, chegamos à equação $t^6 + 10t^3 - 8 = 0$, que tem soluções $t^3 = -5 \pm \sqrt{33}$. Escolhemos a solução positiva e obtemos $t = \sqrt[3]{-5 + \sqrt{33}}$. De $s^3 - t^3 = 10$, obtemos $s^3 = 5 + \sqrt{33}$ e, portanto, $s = \sqrt[3]{5 + \sqrt{33}}$. Finalmente,

$$y = \sqrt[3]{5 + \sqrt{33}} - \sqrt[3]{-5 + \sqrt{33}} \ \cong \ 1.300270977.$$

Scipione guardou esse segredo até quase seu último suspiro. Antes de morrer, passou-o para seu assistente, Antonio Fior.

Tartaglia significa gago. A cidade em que ele nasceu, Bresia, Itália, foi saqueada em 1512 por soldados francesas. Niccolo, ainda menino, foi ferido gravemente em sua mandíbula, por uma espada. Isso lhe deixou seqüelas e o apelido.

Fior não esperou muito. Em 1535 desafiou para um duelo um dos melhores matemáticos da época, Niccolo Fontana Tartaglia (1499 - 1557). Tartaglia, acostumado às vicissitudes da vida, sabia que os lobos estavam à porta. Em pouco tempo resolveu o problema das cúbicas comprimidas e foi além. Descobriu uma maneira de resolver equações do tipo

$$x^3 + ax^2 = c,$$

(onde a e c são constantes positivas) e conseguiu vencer o desafio de Fior.

Veja como é bonito o truque de Tartaglia. Para resolver a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

substitua x por $y - \dfrac{b}{3a}$. Isso deverá eliminar o termo quadrado, recaindo em uma cúbica comprimida. Por exemplo, para resolver a equação

$$x^3 + 6x^2 + 18x + 10 = 0,$$

fazemos a substituição $x = y - 2$. Assim:

$$\begin{aligned}(y-2)^3 \ + \ 6(y-2)^2 \ + \ 18(y-2) \ + \ 10 \ &= \\ &= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6y^2 - 24y + 24 + 18y - 36 + 10 \ = \\ &= y^3 + 6y - 10.\end{aligned}$$

19.1 O segredo é revelado

Está na hora de entrar na história um personagem muito interessante. Girolamo Cardano (1501 - 1576) teve uma vida, no mínimo, pitoresca. Ele deixou uma autobiografia na qual narra suas muitas venturas e desventuras. Cardano interessava-se por muitos assuntos, entre eles matemática. É claro que ele estava interessado na solução da cúbica. Em 1539, Cardano recebeu Tartaglia em sua casa para uma longa visita. Ele só conseguiu que Tartaglia lhe revelasse o segredo da cúbica após ter jurado que guardaria o segredo para si.

Assim, com a ajuda de Tartaglia, Cardano e seu aluno, Ludovico Ferrari (1522 - 1565), dominaram o método de resolver equações cúbicas. Mas, se você não quer que seus segredos sejam revelados, não os conte a ninguém! Em 1545 Cardano publicou um livro, chamado *Ars Magna* (*Arte Suprema*), em que revela o segredo tão ciosamente guardado por Tartaglia.

É preciso dizer que Cardano deu crédito a Tartaglia. Além disso, só publicou o livro após ter visto a solução parcial divisada por Scipione, em alguns de seus papéis póstumos. Além disso, Cardano e Ferrari haviam feito alguns progressos. Ferrari, por exemplo, havia descoberto a solução para equações do quarto grau e isso fora incluído no livro de Cardano. De qualquer forma, isso criou uma terrível disputa com Tartaglia. Apesar de tudo, a divulgação da informação deu um enorme impulso no desenvolvimento da Matemática. Cardano foi o primeiro matemático a divisar os números complexos. Isso lhe permitiu dar um tratamento mais completo às cúbicas.

19.2 Notação matemática

Apesar das confusões causadas pelos personagens desse episódio, a solução das cúbicas mostrou que a Matemática estava pronta para vôos mais altos. Nesse período destacam-se, também, os trabalhos de François Viète (1540 - 1603). Viète é advogado e matemático amador, mas suas contribuições são muito importantes. Ele foi o responsável pelo uso de letras para representar incógnitas e usou trigonometria para resolver equações de grau maior do que 3 e 4. Foi nesse período que se passou a usar os símbolos $=$, $+$ e $-$. Com o aperfeiçoamento das notações algébricas, as precisões dos cálculos algébricos ganham um estágio bem avançado e uma grande aventura estava por vir.

Um passo gigantesco foi dado no momento em que os matemáticos passaram a usar símbolos como $=$, $+$ e $-$, combinados com letras para representar valores a serem determinados, causando o surgimento das equações. Fora uma caminhada milenar para se atingir essa etapa da Matemática.

É preciso ter isso em mente quando vemos alunos tendo dificuldades em resolver um problema literal. Pense um pouco nisso enquanto você se diverte resolvendo o seguinte problema.

Atividade 23

Ninguém sabe exatamente quando nasceu ou morreu Diofanto. No entanto, sabemos quantos anos ele viveu, devido ao enigma elaborado por um de seus discípulos para descrever a vida do mestre:

> A juventude de Diofanto durou 1/6 de sua vida; depois de mais 1/12, nasceu-lhe a barba. Ao fim de mais 1/7 de sua vida, Diofanto casou-se. Cinco anos depois teve um filho. O filho viveu exatamente metade do que viveu o pai, e Diofanto morreu quatro anos depois da morte de seu filho. Tudo isso somado é o número de anos que Diofanto viveu.

Atividade 24

Use o truque de Tartaglia para transformar a equação de Fibonacci $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ na equação $y^3 + \frac{26}{3}y = \frac{704}{27}$. Agora, use a solução de Scipione ou Cardano, para cúbicas comprimidas, e calcule a raiz

$$\frac{\sqrt[3]{352 + 6\sqrt{3930}} + \sqrt[3]{352 - 6\sqrt{3930}} - 2}{3} \cong 1.368808108.$$

Atividade 25

Resolva a equação $y^3 - 15y = 4$ usando a solução de dal Ferro, com s e t. Depois, observando que 4 é uma solução, encontre as outras respostas usando a fórmula de Bhaskara. Como você explica a diferença encontrada?

Unidade 6

Uma Nova Matemática para um Mundo Novo

Nesta unidade didática você verá como a descoberta do Cálculo introduziu vida nova à Matemática e mudou, definitivamente, o cenário científico mundial.

No entanto, imaginar que o surgimento dessa nova ferramenta matemática tenha ocorrido independentemente do contexto científico e cultural é, no mínimo, ingênuo.

O século 16 assistira a descobertas e avanços científicos impressionantes, mas nada que se compare com o que estava por vir.

Texto 20: Sobre os Ombros de Gigantes

O mundo se expandira, era a época das grandes navegações, que ocorreram com a ajuda de novos instrumentos e desenvolvimentos ocorridos na cartografia.

Precisamos lembrar que a imprensa havia sido inventada por Gutenberg na metade do século 15 e isso dera um grande impulso à difusão de informações e conhecimento.

O mundo vivia o momento histórico conhecido como Renascimento, ocorrido nas artes e nas ciências. Um personagem típico desse período foi Luca Pacioli (1445 - 1517), um franciscano e matemático amigo de Leonardo da Vinci. Pacioli teve um de seus livros, o *Divina proportione*, sobre poliedros regulares, ilustrado pelo famoso artista.

Na Matemática, a descoberta de métodos algébricos para a resolução das equações cúbicas e quárticas, resultado dos esforços de dal Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari, assim como os trabalhos de François de Viète, fazendo progressos na parte da notação matemática, dava ânimo aos outros matemáticos e preparava o terreno para novas descobertas.

Nessa época, o desenvolvimento tecnológico passou a exigir da Matemática respostas para seus próprios problemas. Por exemplo, questões sobre áreas e volumes, associadas ao cálculo de centros de gravidade, motivaram Luca Valério (1552 - 1618) a aprofundar os métodos desenvolvidos pelos antigos gregos.

Era o momento de Galileu Galilei (1564 - 1642) fazer pesquisas sobre a queda livre dos corpos, realizadas com genialidade, e mudar definitivamente a maneira de se produzir ciência. Foi ele quem apontou o telescópio para os céus, tornando um brinquedo em uma ferramenta científica, sendo o primeiro ser humano a vislumbrar a grandeza do cosmo.

Outro gigante das ciências foi Johannes Kepler (1571 - 1630) que revelou aos homens as leis que regulam o funcionamento do sistema solar, decifrando um mistério milenar.

A primeira lei de Kepler afirma que as órbitas planetárias são elipses nas quais o sol ocupa um dos focos. (Nada de círculos, ou círculos se revolvendo sobre outros círculos, a solução não era euclidiana, no sentido de régua e compasso.) A segunda afirma que o segmento (imaginário) que une o sol ao planeta descreve áreas (setores elípticos) iguais em tempos iguais. Isso explica por que os planetas aceleram quando se aproximam do sol e diminuem sua velocidade quando dele se afastam.

Vale a pena ouvir, pelo menos uma vez, o canto de vitória de Kepler, escrito no prefácio do seu *Harmonices mundi*, descrevendo a intensidade de seus sentimentos ao vislumbrar sua descoberta:

> Fui iluminado, em meio a uma contemplação muito admirável, há dezoito meses por um primeiro clarão, há três meses por uma claridade diferente e há poucos dias pelo próprio sol.

Veja, Kepler estava consciente da importância de sua descoberta, mas sabia de que ela encontraria resistência em alguns setores. A virada do século 16 para 17 assiste à mudança do eixo de produção matemática da Itália para mais ao norte da Europa. A necessidade de um ambiente onde há liberdade de pensamento para a produção científica explica, em parte, esse fenômeno. É bom lembrar que Galileu foi forçado a renegar suas idéias e terminou seus dias isolado.

O século 17 foi inaugurado com um avanço matemático notável – a introdução, aperfeiçoamento e utilização de uma ferramenta matemática extraordinária – o logaritmo. Isso foi resultado dos esforços conjuntos de dois britânicos: John Napier (1550 - 1617) e Henry Briggs (1561 - 1631).

É um pouco difícil para um jovem estudante de Matemática, que pode comprar uma calculadora científica em qualquer esquina, entender o porquê de toda essa importância. No entanto, os logaritmos transformam multiplicações e divisões em somas e diferenças, respectivamente, ajudando imensamente todas as atividades científicas que demandavam cálculos elaborados, como a astronomia.

A motivação para essa descoberta fora a comparação entre a série aritmética e a série geométrica, colocadas em direta correspondência por Michael Stiefel no livro *Arithmetica Integra*, de 1544:

$$\begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128 & 256 & \dots \end{array}$$

observando que a soma na seqüência da linha superior correspondia ao produto na série da linha inferior. Stiefel se referia aos números de cima como os *expoentes* dos números de baixo.

Você se lembra do famoso algoritmo para extrair *raízes quadradas? Veja que extrair significa tirar sob duras penas... Muito bem, sem usar a calculadora, marcando no relógio, depois de passar uma meia hora treinando para relembrar, realize, então, o exercício proposto.*

Atividade 26

Calcule $\sqrt{13457.29}$.

Agora, quanto tempo você levaria para dividir 9.507276246 por dois? Portanto, se você dispusesse de uma maneira de transformar 13457.29 em 9.507276246 e, aplicando o processo inverso, *destransformar* a metade deste número de volta, você ainda tentaria usar o algoritmo da raiz quadrada?

Veja, $\ln 13457.29 = 9.507276246$, $9.507276246/2 = 4.753638123$ e $e^{4.753638123} = 116.0055602$. Portanto, $\sqrt{13457.29} = 116.0055602$.

Note que as primeiras tabelas de logaritmo, construídas por Napier, não eram na base 10. Em 1615, com a colaboração de Briggs, foram construídas as tabelas onde o logaritmo de 1 é zero e logaritmo de 10 é 1. Isso é, logaritmo na base 10. A constante e, base do que chamamos logaritmo natural, foi introduzida posteriormente, por Euler.

Texto 21: Prelúdio do Cálculo

No início do século 17 os matemáticos voltaram a enfrentar um velho adversário – o infinito. Havia três tipos de questões que se apresentavam:

- as somas *infinitas*;
- o cálculo de áreas (problemas do tipo *quadratura*);
- o problema das tangentes a curvas dadas.

A questão das somas infinitas tem suas raízes no passado, já na época dos gregos. Por exemplo, um dos paradoxos de Zenão pode ser colocado assim:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots \;=\; 1?$$

Durante a Idade Média, foram feitos vários progressos nesse sentido. Por exemplo, vale a pena conhecer um pouco da história do norueguês Nicole Oresme (1323 - 1382) que estudou na Universidade de Paris e foi amigo de longa data de Carlos V, rei da França. Oresme definitivamente considerava a igualdade anterior verdadeira. Ele calculou a soma da série

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\dots\;+\;\frac{n}{2^n}+\dots$$

e foi o primeiro matemático a provar a divergência da série harmônica

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$$

Isso é um feito e tanto. Para mostrar que a série diverge, é preciso mostrar que, dado um número qualquer $R>0$, existe um número inteiro N, tal que

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \;=\; 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N-1}+\frac{1}{N} \;>\; R.$$

Veja, para ultrapassar o número $R = 10$, por exemplo, é necessário tomar $n = 12\,367$. Ou seja, a soma dos $12\,366$ primeiros termos da série é, aproximadamente, 9.999962148.

Observe como Oresme resolveu o problema:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots\frac{1}{16} > \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\ldots\frac{1}{32} > \frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}+\cdots+\frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}.$$

Prosseguindo assim, tomando partes cada vez mais compridas da série, seguimos somando parcelas que, de $1/2$ em $1/2$, ultrapassam qualquer número $R > 0$.

É claro que isso toma muitos termos, mas temos uma quantidade inesgotável deles.

Atividade 27

Repita um dos feitos de Oresme e calcule a soma a seguir.

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$$

As questões do tipo cálculo de áreas e de volumes, assim como as questões sobre tangentes a curvas, ocuparam muitas mentes brilhantes. Novamente, a questão de lidar com infinito ou infinitésimos estava em pauta.

Para o estudo do comportamento dos planetas, Kepler precisava determinar áreas de setores elípticos, mas também considerou, por razões mais prosaicas, o cálculo do volume de barris de vinho. Sua abordagem era a de dividir, por exemplo, um dado sólido em um número infinito de pedaços infinitesimais, ou sólidos *indivisíveis*, de um tamanho ou forma conveniente para o problema.

Outro matemático que marcou essa época foi Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), que produziu dois alentados volumes: *Geometria indivisibilibus continuorum* (*Geometria dos Indivisíveis*), de 1635, e *Exercitationes geometricae sex*

(*Seis Exercícios Geométricos*), de 1647. A abordagem de Cavalieri era diferente da de Kepler. Veja o chamado Princípio de Cavalieri:

> Dois sólidos com a mesma altura, que têm suas seções planas de mesmo nível com as mesmas áreas, têm o mesmo volume.

Cavalieri calculou o volume da esfera de raio R, comparando com o volume do cilindro de raio R e altura $2R$ menos dois cones de altura R e raio R. Para isso, basta mostrar que a área do disco contido na esfera é igual à área da coroa contida no cilindro menos o par de cones, na mesma altura. Veja na figura a seguir.

Como o volume do cilindro é $2\pi R^3$ e o volume de cada cone é $\pi R^3/3$, o volume da esfera é $2\pi R^3 - \dfrac{2\pi R^3}{3} = \dfrac{(6-2)\pi R^3}{3} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$.

Para ter certeza de que a conta está correta, observe o diagrama a seguir.

O raio r, do disco de nível $-h$, na esfera, satisfaz a relação $R^2 = r^2 + h^2$, devido ao triângulo retângulo da figura da esquerda. Portanto, a área deste disco é $\pi r^2 = \pi(R^2 - h^2)$. Por outro lado, a coroa circular consiste do disco de raio R menos o disco de raio h, como mostra o triângulo isósceles da figura da direita. Sua área é, portanto, $\pi R^2 - \pi h^2$.

No início do século 17, a França produziu algumas pessoas geniais que contribuíram fortemente para a criação do cálculo. Vamos conhecer algumas delas.

Texto 22: A Conexão Francesa

René Descartes (1596 - 1650) é conhecido pela frase – Penso, logo existo – e pelo livro chamado *Discurso sobre o Método para Bem Conduzir a Razão a Buscar a Verdade Através da Ciência*. Descartes proporcionou aos matemáticos uma experiência riquíssima. Se duas áreas da Matemática são poderosas, juntas são imbatíveis. Descartes uniu equações às curvas, criando a geometria analítica. Estava criado o *sistema cartesiano*, palco de tantas ações matemáticas. Isso tudo fazia parte de um apêndice do *Discurso*, chamado *Geometria*, que era dividido em três partes.

Por exemplo, no segundo desses livros, Descartes considera as equações do tipo

$$F(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

e descreve as condições para que elas representem elipses, hipérboles ou parábolas. Ele mostra, ainda, como determinar tangentes a uma dada cônica.

As questões de encontrar tangentes estavam, por assim dizer, no ar.

Contemporâneo de Descartes, Pierre de Fermat (1601 - 1665) ficou conhecido como *Príncipe dos Amadores*, pois se dedicava à Matemática nas horas de folga. Fermat era um conselheiro do parlamento da cidade de Toulouse, no sul da França, e nunca publicou um só artigo de Matemática em toda a vida. Ele divulgava suas descobertas através de correspondência com outros matemáticos e muitas outras de suas contribuições só foram descobertas após sua morte.

Como Fermat não tinha um compromisso formal, por assim dizer, com a Matemática, muitas de suas descobertas eram divulgadas apenas de forma fragmentada. A história mais famosa devido a coisas como essa é a do chamado Último Teorema de Fermat. Tudo começou com uma nota que ele escreveu em sua cópia do *Aritmética*, de Diofanto, junto da Proposição II.8, sobre a expressão de um quadrado como a soma de dois outros quadrados. Isso é, há números inteiros quadrados que são soma de dois outros números inteiros quadrados, como $5^2 = 3^2 + 4^2$ ou $13^2 = 5^2 + 12^2$.

> É impossível dividir um cubo em dois cubos, ou uma quarta potência em duas potências de quatro, ou geralmente qualquer potência maior do que o quadrado na soma de duas iguais potências; e eu encontrei uma demonstração admirável para esse fato, mas essa margem é muito estreita para contê-la.

A afirmação pode ser traduzida da seguinte forma: não existem três números inteiros x, y e z tais que

$$x^n + y^n = z^n,$$

para n inteiro maior do que 2, e deveria ser chamada *Conjectura de Fermat*, pois não havia demonstração.

Poucas vezes na história uma questão matemática desafiou tanto a inventividade de matemáticos profissionais e amadores. A facilidade do enunciado certamente contribuiu para atrair o interesse de tantas pessoas, ocultando, no entanto, a enorme dificuldade do problema.

Bem, não *havia* demonstração, mas agora há. Em 1993 Andrew Wiles proferiu uma palestra em Cambridge apresentando os resultados de suas pesquisas. O Teorema de Fermat estaria demonstrado como conseqüência. No entanto, falhas na demonstração de Wiles deixavam de fora alguns casos especiais, entre eles o que provaria o Teorema de Fermat. Como num filme de suspense, o vilão se levantava mais uma vez. Finalmente, em 1994, novos argumentos foram apresentados por Wiles e Richard Taylor cobrindo todos os casos, inclusive o que demonstrava o Teorema de Fermat. Para saber os detalhes dessa história realmente maravilhosa, não deixe de ler o livro *O Último Teorema de Fermat*, de Simon Singh.

Fermat deixou sua marca na teoria de números e também foi o co-responsável pelos fundamentos da probabilidade, devido às suas contribuições através de cartas que trocou com Blaise Pascal (1623 - 1662), outro grande matemático daqueles dias. Seus progressos no desenvolvimento do que chamamos cálculo diferencial foram muitos. Ele percebeu, por exemplo, que a noção de reta tangente a uma dada curva poderia ser usada para detectar pontos de máximo ou de mínimo.

Veja como Fermat teria resolvido o problema a seguir.

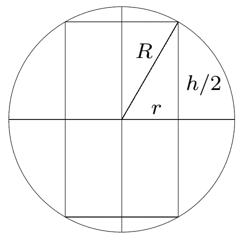
Calcule as proporções do cilindro reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio R.

Esse problema encantaria qualquer um dos matemáticos gregos do passado, mas eles não disporiam de qualquer método que permitisse encontrar a resposta.

Vamos denotar o raio da base do cilindro por r e sua altura por h. Usando o Teorema de Pitágoras, temos $R^2 = r^2 + \dfrac{h^2}{4}$. Isolando o valor de r^2 nessa fórmula e substituindo em $\pi\, r^2\, h$, o volume do cilindro, obtemos a fórmula do volume do cilindro em termos apenas de sua altura:

$$V(h) = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h.$$

De posse dessa equação, Fermat calcularia a inclinação da reta que contém os pontos $(h, V(h))$ e $(h + a, V(h + a))$, como estamos habituados a fazer nos cursos de Geometria Analítica, obtendo



Corte da esfera com cilindro reto inscrito por um plano contendo a origem.

$$\begin{aligned}
\frac{V(h+a) - V(h)}{a} &= \frac{\pi \left(R^2 - \frac{(h+a)^2}{4} \right)(h+a) - \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h}{a} \\
&= \frac{\pi\,(4R^2(h+a) - (h+a)^3 - 4R^2 + h^3)}{4a} = \\
&= \frac{\pi\,(4R^2 h + 4R^2 a - h^3 - 3ah^2 - 3ha^2 - a^3 - 4R^2 h + h^3)}{4a} = \\
&= \frac{\pi}{4}\,(4R^2 - 3h^2 - 3ha - a^2).
\end{aligned}$$

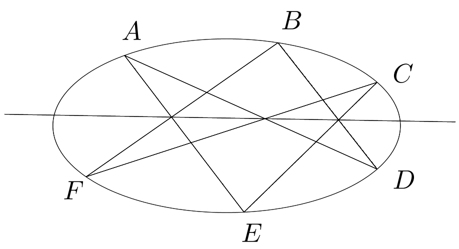
Para determinar a inclinação da reta tangente no ponto $(h, V(h))$, basta fazer $a = 0$, obtendo $\dfrac{\pi\,(4R^2 - 3h^2)}{4}$. O ponto máximo ocorre onde essa inclinação é zero, ou seja, $4R^2 - 3h^2 = 0$. Portanto, o cilindro de volume máximo inscrito na esfera de raio R tem altura $h = \dfrac{2\sqrt{3}\,R}{3}$ e raio $r = \dfrac{\sqrt{6}R}{3}$.

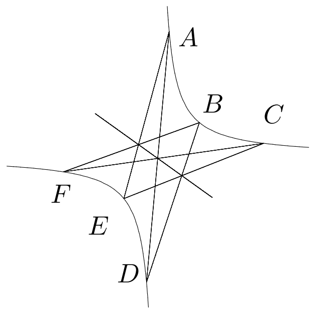
O fato da equação que define o volume do cilindro em termos da sua altura ser polinomial foi crucial para o truque funcionar. Apesar de estarmos calculando uma derivada e igualando-a a zero, em nenhum momento usamos a noção de limite! Isso ficou escondido na passagem em que trocamos o a por zero, *após* termos feito todas as fatorações.

Além de Descartes e Fermat, Pascal também dedicou sua engenhosidade à resolução de problemas de cálculo. Ele começou sua carreira matemática na geometria, provando, aos 16 anos, um teorema sobre a colinearidade dos pontos de interseção dos lados opostos de um hexagrama *místico* inscrito em uma cônica.

> Se um hexágono $ADBFCE$ (não necessariamente convexo) for inscrito em uma cônica (como um círculo ou uma elipse), então os pontos de interseção das retas que conectam vértices opostos (AD com FC, DB com CE e BF com EA) são colineares. Essa reta é chamada *reta de Pascal* do hexaedro.

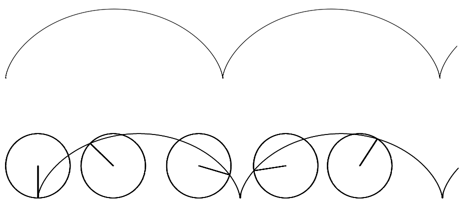
Veja, nas figuras a seguir, duas possibilidades: hexagrama inscrito numa elipse e hexagrama inscrito numa hipérbole.





Aos 18 anos construiu o primeiro computador de que se tem notícia, chegando a produzir e vender cerca de cinqüenta máquinas. Não é por nada que chamamos Pascal uma das primeiras linguagens desenvolvidas para programação de computadores.

Pascal dedicou algumas semanas de sua vida estudando a ciclóide, nome dado por Galileu Galilei à curva obtida do traço de um ponto do bordo de um círculo rolando ao longo de uma reta.



Seria injusto terminar esse momento em que falamos de matemáticos franceses geniais desse período sem mencionar Girard Desargues (1591 - 1661). Ele fundou as bases da *geometria projetiva*, mas seus trabalhos só ganharam reconhecimento posteriormente.

Como você pôde ver, havia uma profusão de resultados do tipo cálculo diferencial (problemas de tangentes a curvas) e integral (questões de cálculo de áreas e volumes). Muitos outros matemáticos, como Evangelista Torricelli (1698 - 1647), Gilles Persone de Roberval (1602 - 1675), John Wallis (1616 - 1703) e Isaac Barrow (1630 - 1677) deram suas contribuições. Em particular, Barrow foi o primeiro a notar a conexão que há entre essas duas questões.

Texto 23: Newton e Leibniz – dois gênios e uma idéia!

O fato de que a área abaixo da curva $y = x^n$, de 0 até a ser $\dfrac{a^{n+1}}{n+1}$ e de que a inclinação da reta tangente à curva $y = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$, no ponto de abscissa a, ser a^n, não lhe passou despercebido.

No entanto, dois personagens são reconhecidos como os criadores do Cálculo. A razão disso está no escopo de suas abordagens. Eles não se ativeram a resolver um ou outro problema específico, mas desenvolveram, cada um a sua maneira, métodos gerais de lidar com essas questões. Nisso reside o mérito de suas contribuições.

23.1 *Anni mirabili*

Os anos de 1666 e 1667 foram particularmente difíceis para os ingleses. Uma terrível peste, a peste bubônica, abateu-se sobre a Inglaterra, forçando, inclusive, o fechamento temporário das universidades de Oxford e Cambridge. Esse período de recolhimento foi, no entanto, propício para as ciências. Um estudante de Cambridge retornou para a casa de seus avós, que ficava na zona rural de Woolsthorpe, Lincolnshire. Esse jovem de 24 anos produziu então uma série de resultados científicos que mudariam, de maneira dramática e definitiva, o panorama das ciências.

Isaac Newton

Seu nome era Isaac Newton (1642 - 1727). Entre as descobertas feitas por Newton neste período, que ficou conhecido como *anni mirabili* (*anos miracu-*

losos), temos uma generalização do Teorema Binomial, a Teoria da Gravitação e a análise da natureza da luz.

A importância dos trabalhos de Newton reside na praticidade de seus métodos e no tipo de problemas que ele pôde resolver. Por exemplo, partindo das leis de gravitação e usando os métodos de cálculo por ele desenvolvidos, pôde *demonstrar* as leis de Kepler.

Um exemplo da visão de Newton é sua generalização do Teorema Binomial. Esse teorema descreve como obter a expansão do binômio $(a+b)^n$, para todo inteiro positivo n. Veja,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

e assim por diante.

Para determinar os coeficientes dessas expansões, basta tomar a correspondente linha no chamado *triângulo de Pascal*:

Na verdade, esse arranjo de números era conhecido desde muito antes de Pascal. Por exemplo, Omar Khayyam, matemático árabe, e Chu Shih-Chieh, matemático chinês que o menciona no livro *O Espelho Precioso dos Quatro Elementos*, por volta de 1303.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Para obter a próxima lista, basta começar com o número 1 e seguir somando os dois números logo acima da posição a ser preenchida. Ela seria 1, 7, 21 e assim por diante.

O jovem Newton percebeu que é possível determinar os coeficientes diretamente, sem a construção do triângulo linha por linha até chegar à potência desejada. Algo como fazemos agora com a fórmula para determinar o coeficiente do termo

$a^{n-i}b^i$:

$$C(n,i) = \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!} \ .$$

Dessa forma, para expandir $(1+x)^3$, fazemos

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + \frac{3\times 2}{2}x^2 + \frac{3\times 2\times 1}{3\times 2}x^3 + \frac{3\times 2\times 1\times 0}{4\times 3\times 2}x^4 + \dots$$

observando que, a partir do termo de grau 4, os coeficientes se anularão.

Newton observou que essa fórmula vale para expoentes fracionários e negativos.

Para calcular $(1+x)^{-3}$, ele faria

$$1 + (-3)x + \frac{(-3)(-4)}{2}x^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{2\times 3}x^3 + \dots$$

obtendo

$$\frac{1}{(1+x)^3} \ = \ 1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \dots$$

A diferença, agora, é que o lado direito da igualdade é uma soma infinita. Ele confirmou sua descoberta observando que

$$(1 + 3x + 3x^2 + x^3)(1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 - \dots) = 1.$$

Newton *não* observou que essa expressão só vale para valores de x no intervalo $(-1,1)$. Mas essas computações eram mais do que só interessantes. Eram uma poderosa ferramenta de cálculo. Usando esse teorema binomial, obteve a expansão em série da função $y = \sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2}$, obtendo

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 - \dots$$

Por exemplo, usando esses termos da série, podemos calcular uma aproximação para $\sqrt{3}$. Primeiro, precisamos de um truque. Observe que $3 = 4 - 1$. Assim, $\sqrt{3} = \sqrt{4\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \ = \ 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}}$ e

$$\sqrt{3} \cong 2\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{128} - \frac{1}{1024} - \frac{5}{32768} - \frac{7}{262144}\right) = 2\times\frac{227025}{262144} \cong 1.732063293.$$

Não deixe de comparar essa aproximação com aquela que você pode obter usando uma simples calculadora científica. Veja que usamos apenas 6 termos da série.

Em nossa viagem no tempo e espaço, estivemos em inúmeras regiões. Assim, chegamos à segunda metade do século 17, mais especificamente na Alemanha.

23.2 Leibniz entra em cena

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) nasceu em Leipzig, Alemanha. Além do Cálculo, Leibniz deu grandes contribuições no campo da lógica.

Para saber mais sobre este tema, você pode ler o capítulo "Newton e Leibniz – Um Choque de Titãs", do livro *Grandes Debates da Ciência*, de Hal Hellman, Editora Unesp, 1998.

Alguns anos depois, entre 1673 e 1676, um outro gênio produziu sua versão do Cálculo. Este foi Gottfried Wilhelm Leibniz, que começara sua carreira como diplomata. Ele fora atraído para a Matemática graças à influência de Cristian Huyggens, a quem conhecera em Paris enquanto estava em uma missão diplomática.

Newton e Leibniz, bem como seus seguidores, se envolveram em uma polêmica sobre a originalidade da descoberta do Cálculo. Isto causou grande desgaste pessoal a cada um. A verdade é que suas abordagens foram diferentes, levados por motivações outras. Newton apresenta o Método das Fluxões como uma ferramenta que lhe permite aprofundar seus conhecimentos dos fenômenos físicos. Isto é, uma visão cinemática do Cálculo: a derivada vista como uma taxa de variação. Newton considerava x e y variando, fluindo, em função do tempo. Leibniz, por sua vez, considerava x e y variando sobre uma seqüência de valores infinitamente próximos. Ele introduziu dx e dy como sendo as diferenças entre os valores nesta seqüência.

23.3 O cálculo diferencial e integral

Newton via a integração como um problema de encontrar os x e y de uma determinada fluxão. Isto é, encontrar o deslocamento de uma dada velocidade. Portanto, para ele, a integração era, naturalmente, o processo reverso da diferenciação. Leibniz via a integração como uma soma, no estilo que fizeram, antes dele, Arquimedes e Cavalieri. Leibniz foi feliz em utilizar os 'infinitésimos' dx e dy onde Newton usou x' e y', ou seja, velocidades. Leibniz usava a palavra 'mônada' para indicar algo tão simples que não tem partes. Nenhum deles considerava o que denominamos funções, pois este conceito só foi introduzido muitos séculos depois. No entanto, ambos, definitivamente, pensavam em termos de gráficos. De qualquer forma, estavam travando uma luta com o infinito, no caso, o infinitamente pequeno.

Apesar de Newton ter desenvolvido sua teoria primeiro, coube a Leibniz o mérito de ter publicado sua versão, em 1684, introduzindo o termo *calculus summatorius*, e divulgando suas idéias. Leibniz dava muita importância à notação, no que estava absolutamente certo.

Leibniz introduziu os símbolos matemáticos d e $\displaystyle\int$, estabelecendo, por volta de 1675, a notação

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2},$$

exatamente como nós o fazemos até hoje.

Assim chegamos ao fim da unidade didática com pelo menos uma visão global da enorme odisséia que foi o descobrimento do Cálculo. Newton e Leibniz se sobrepuseram a seus contemporâneos devido ao escopo de suas descobertas. Conseguiram ver *além dos outros matemáticos. Pudera, eles se encontravam sobre os ombros de gigantes, como diria Newton.*

De qualquer forma, muito ainda estava por ser feito e os novos desbravadores já estavam se preparando. Os irmãos Jakob e Johann Bernoulli e, principalmente, Leonhard Euler, continuariam a descobrir e a usar o Cálculo por todo o século 18 e só no século 19 Cauchy e Weierstrass colocariam toda a teoria em bases sólidas, como a estudamos hoje.

Mas, para contar um pouco sobre essa parte da história, devemos esperar as próximas unidades didáticas.

Unidade 7

A equação de Euler: $e^{i\,\pi} + 1 = 0$

Nesta unidade didática você conhecerá alguns dos triunfos de Leonhard Euler, um dos matemáticos mais produtivos de todos os tempos e o mais importante do século 18.

Verá como os desafios matemáticos continuavam estimulando a criatividade dos matemáticos, indicando que a sede de resolver problemas continuava, entre os matemáticos, forte como sempre.

Iniciamos mostrando como as equações matemáticas passaram a ocupar espaço no cenário da Matemática, que começava a ficar mais sintética e menos literal.

Texto 24: A Essência da Matemática

O número de outubro de 2004 da revista *Physics World* traz um artigo intitulado *The greatest equations ever*, algo assim como *As maiores equações de todos os tempos*. O artigo é resultado de uma pesquisa proposta aos leitores da revista, pedindo indicações de suas equações preferidas, acompanhadas de uma justificativa da escolha.

Entre as mais indicadas estavam equações bem conhecidas e, também, surpresas. Veja algumas.

$$\boxed{1 + 1 = 2} \qquad \boxed{E = m\,c^2} \qquad \boxed{F = m\,a}$$

A equação $1+1=2$ foi indicada, por exemplo, por sua simplicidade, enquanto as outras duas têm a popularidade garantida devido à sua importância no mundo da Física. A equação $E = mc^2$, formulada por Einstein, expressa a relação entre a massa e a energia, no contexto da Teoria da Relatividade e $F = ma$ é a formulação da Segunda Lei de Newton, relacionando a aceleração provocada por uma força atuando sobre um corpo.

O artigo também provocou uma discussão sobre o significado do termo equação. Mais especificamente, as pessoas queriam saber a diferença entre termos como equação, fórmula e teorema. Como se trata de nomenclatura, a discussão tem uma importância relativa, mas é interessante. Por exemplo, é bem provável que muitas pessoas respondam com a equação $a^2 = b^2 + c^2$ ao pedido de citar o Teorema de Pitágoras.

É verdade que a fórmula *não é* o Teorema de Pitágoras, no sentido que a igualdade pode não ser satisfeita caso a, b e c não sejam os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo. E, mesmo que fossem, a igualdade só se cumpre se a for o comprimento do lado maior, a hipotenusa.

Mas, implicâncias matemáticas à parte, não podemos negar que

$$a^2 = b^2 + c^2$$

carrega, em si, a essência do teorema.

Outro exemplo vem da fórmula de Euler para poliedros convexos,

$$V - A + F = 2$$

relacionando algebricamente o número de seus vértices, arestas e faces.

Heinrich Hertz (1857-1894), físico alemão que demonstrou pela primeira vez, em 1888, a existência de radiação eletromagnética, construindo um aparelho que produzia ondas de rádio. Seu nome é usado para denotar a unidade de freqüência que um determinado evento repetitivo, como o som ou ondas eletromagnéticas, ocorre por unidade de tempo. 1 Hz (um hertz) indica que o evento ocorre uma vez por segundo.

Uma das citações famosas sobre esse tema é de Hertz:

> É impossível evitar o sentimento de que essas fórmulas matemáticas têm uma existência independente e uma inteligência própria, que elas são mais sábias do que nós, mais sábias mesmo que seus descobridores, que conseguimos delas algo mais do que foi originalmente colocado nelas.

A frase de Hertz tem um extra significado quando notamos que entre as mais indicadas na pesquisa estavam as equações de Maxwell, que descrevem como um campo eletromagnético varia no espaço e no tempo. Vale a pena dar uma olhada nessas equações, mesmo que não esteja em nossos planos nos aprofundarmos em tal direção.

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\
\nabla \cdot B &= 0 \\
\nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\
\nabla \times B &= \mu_0 J + \epsilon_0\, \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t}
\end{aligned}
$$

James Clerk Maxwell (1831-1879), físico britânico que explicou as propriedades do eletromagnetismo. Publicou um conjunto de quatro equações diferenciais nas quais descreve a natureza dos campos eletromagnéticos em termos de espaço e tempo.

Nestas equações, E é o campo elétrico, B o campo magnético, $\nabla \cdot X$ denota o divergente do campo X, $\nabla \times X$ o seu rotacional e, bem, assume-se que as grandezas estão representadas no sistema de unidades mks.

As duas primeiras equações dizem que o campo elétrico e o campo magnético satisfazem à Lei de Gauss.

Apesar de terem uma estrutura relativamente simples, as equações de Maxwell nos permitiram uma nova perspectiva da natureza, unificando eletricidade e magnetismo. Essa teoria enlaçou a Física e a Matemática de uma maneira inovadora, fazendo mais do que descrever os fenômenos eletromagnéticos. Tal descoberta afetaria a maneira de produzir tanto Matemática quanto Física.

O tema é interessante mas, adiantamo-nos. Essas equações são chamadas diferenciais e foram formuladas no século 19. Nesta unidade didática, entretanto, vamos falar sobre acontecimentos ocorridos no século 18. Isso nos traz à outra das equações mais votadas:

$$\boxed{e^{i\,\pi} + 1 \;=\; 0.}$$

Conhecida por *equação de Euler*, ela não descreve algum fenômeno especial da natureza, não dita uma certa identidade válida para quaisquer grandezas, como a famosa $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \;=\; 1$, ou é a conclusão de um grande teorema, como a equação $a^2 = b^2 + c^2$, conclusão do Teorema de Pitágoras. No entanto, ela tem um sentido simbólico forte.

A equação reúne nove conceitos básicos de Matemática numa só expressão. Temos: e, a base dos logaritmos naturais; a operação elevar ao expoente; a constante π; a multiplicação; números complexos; a operação de soma, representada por $+$; o número 1; igualdade; o número 0.

A equação merece ser citada no Guinness. (Adivinhe qual das equações é citada nesse livro!)

Na verdade, a equação simboliza a diversidade, reunindo numa frase tão curta tantas diferentes áreas matemáticas. Além do mais, é um tributo a um homem genial, Leonhard Euler (1707 - 1783), que com sua simplicidade, criatividade e muito trabalho contribuiu de maneira singular para o desenvolvimento da Matemática.

É por essa razão que consideramos as equações a essência da Matemática.

24.1 Os irmãos Bernoulli

Começamos a descrever o desenvolvimento matemático ocorrido no século 18 fazendo menção a dois membros de uma famosa família de matemáticos: os irmãos Jakob e Johann Bernoulli, precursores do genial Euler.

O mais velho dos irmãos Bernoulli, Jakob (1645 - 1705), deu enormes contribuições ao desenvolvimento do Cálculo, das séries (somas infinitas) e, especialmente, à probabilidade. Seu principal trabalho foi publicado em 1713, sob o nome de *Ars Conjectandi* (*Arte de Conjecturar*), sobre probabilidade.

Jakob publicou uma prova da divergência da série harmônica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{k} + \ldots$$

num livro de 1689, atribuindo, no entanto, a solução do problema ao irmão Johann Bernoulli (1667 - 1748). É interessante observar que o argumento apresentado é diferente daquele usado por Nicole Oresme, mais do que dois séculos antes. Além dos argumentos dados por Oresme e pelos Bernoulli, o italiano Pietro Mengoli (1625 - 1686) apresentou uma terceira demonstração, que antecedeu à de Johann por quarenta anos.

Isso mostra como a divulgação dos resultados matemáticos era deficiente. Com o passar do tempo isso melhoraria muito. De fato, os principais matemáticos do século 18 estavam ligados a alguma academia de ciência. As mais importantes eram a de Paris, Berlim, São Petersburgo e Londres. Essas academias estavam diretamente ligadas aos governantes daqueles países, como Luís XV e Luís XVI, Frederico, o Grande, Catarina, a Grande.

Johann Bernoulli também foi um grande matemático e teve um papel de destaque, juntamente com seu irmão, no desenvolvimento e divulgação do Cálculo. Eles mantiveram freqüente correspondência com Leibniz. Johann foi professor de um nobre francês, o Marquês de l'Hôpital (1661 - 1704), que publicou o primeiro livro texto de Cálculo, em 1696, chamado *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (*Análise dos infinitamente pequenos para o entendimento de curvas*).

Esse livro apresentou a conhecida *Regra de l'Hôpital*, um resultado obtido por Johann Bernoulli, que permite calcular com desembaraço alguns limites, garantindo que, se $f(x)$ e $g(x)$ são funções diferenciáveis tais que $f(a) = g(a) = 0$ e, $g(x) \neq 0$ para valores diferentes x de a, suficientemente próximos a a,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o limite da direita exista.

Uma interrupção para um pouco de prática.

Atividade 28

Use a Regra de l'Hôpital para calcular o limite a seguir:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 6x + 6 \operatorname{sen} x}{x^5}.$$

24.2 O desafio da Braquistócrona

Com o desenvolvimento do Cálculo, surgiu uma nova forma de equação, que serviria para modelar muitos problemas provenientes de outras áreas científicas.

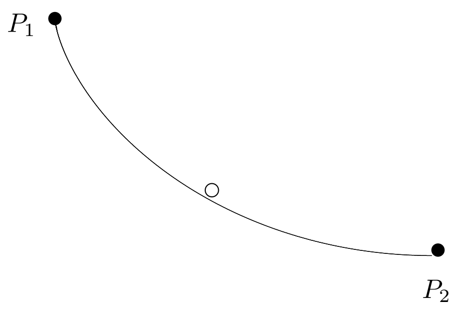
São equações cujas soluções não são números, mas o que nós chamamos funções. Naqueles dias podiam ser chamadas simplesmente curvas. Essas equações são as chamadas *equações diferenciais*. Por exemplo, as equações diferenciais lineares, que estudamos ainda nos cursos de Cálculo, têm a forma geral

$$y' + p(x)\,y \;=\; q(x).$$

Um exemplo de problema desse tipo foi proposto por Johann Bernoulli, em 1696, num artigo publicado na revista *Acta Eruditorum*, editada por Leibniz. Na verdade, Johann propôs um desafio a seus colegas matemáticos, bem no estilo dos desafios havidos nos dias de Tartaglia, Cardano e Ferrari. O problema consistia em descobrir a identidade da curva que ele nomeou *braquistócrona*, junção das palavras gregas *brachistos*, que quer dizer *o mais curto*, e *chronos*, que significa *tempo*.

> Descubra a curva que une dois pontos P_1 e P_2 num plano vertical, de tal modo que um ponto material de massa m, deslizando sem atrito sobre essa curva, sujeito apenas à gravidade, a percorra num intervalo de tempo mínimo.

É claro que a tentativa mais primitiva consiste em tomar a reta que une os dois tais pontos. No entanto, essa não é a resposta correta.



O prazo estipulado por Johann para que a resposta fosse apresentada terminava em 1 de janeiro de 1697. Ao fim desse prazo, a única resposta apresentada fora a de Leibniz. Na verdade, o grande desafio estava estendido a Newton, que nesses dias andava ocupado com a direção da Casa da Moeda inglesa. Johann estendeu o prazo de seu desafio até a Páscoa e fez questão de enviá-lo até a Inglaterra.

Quando chegou a Páscoa, Johann havia recebido cinco soluções. Uma era dele próprio e outra dada por Leibniz. Jakob também apresentou sua solução, para possível embaraço de seu orgulhoso irmão, assim como o fez o jovem Marquês de l'Hôpital. No entanto, mais uma resposta correta chegara da Inglaterra, porém sem nenhuma assinatura. A braquistócrona nada mais é do que parte da ciclóide, curva conhecida e estudada por Pascal, Galileu e outros.

Para saber mais! Se você quiser saber mais detalhes sobre o problema da braquistócrona, há informação, por exemplo, no site

www.icms.sc.usp.br/∼szani/bra/bra.html,

da página da Universidade de São Paulo, em São Carlos.

Conta a lenda que, ao abrir a solução enviada por uma carta anônima de Londres, Johann, entre surpreso e embaraçado, disse: *pela pata se reconhece o leão!*

Chegamos aqui ao matemático que, por sua inventividade, constitui o tema da unidade.

Leonhard Euler (1707-1783).

Texto 25: Euler – O Gênio do Século

Nesse momento histórico, tão rico em atividade matemática e de muita competição, nasceu Leonhard Euler, na Basiléia, Suíça. Seu pai, Paul Euler, era pastor luterano e havia sido aluno de Jakob Bernoulli e dera ao filho suas primeiras lições. Devido a essa conexão com a família Bernoulli, Euler foi aluno de Johann Bernoulli e manteve amizade por toda a vida com seus filhos, Daniel e Nicolau, ambos matemáticos.

Euler dividiu sua vida profissional entre duas instituições: a Academia de Ciência de São Petersburgo, na Rússia, e a Academia de Ciência de Berlim. Ele ocupou, em 1727, a cadeira de Medicina na Academia de Ciência de São Petersburgo, que fora fundada dois anos antes por Catarina I, esposa de Pedro, o Grande, Czar da Rússia. Alguns anos depois, ocupou a cadeira de Matemática, que ficara vaga quando Daniel Bernoulli mudou-se de volta para a Suíça. Em 1741 mudou-se para Berlim, onde permaneceu até 1766. Leonhard Euler era um homem simples e nunca se sentira à vontade na corte de Frederico, o Grande, patrono da Academia de Berlim, na qual brilhavam nomes como Voltaire, e as discussões filosóficas eram muito apreciadas. Assim que uma nova oportunidade surgiu, Euler retornou definitivamente para São Petersburgo.

Euler teve uma vida sem dificuldades financeiras, devido aos cargos que ocupou, e constituiu uma enorme família. Foi perdendo a visão do olho direito ao longo da década de 1730 e viveu seus últimos 17 anos completamente cego.

Isso, no entanto, não o impediu de seguir produzindo Matemática de qualidade e em quantidade até, virtualmente, seu último suspiro. Dotado de uma memória vastíssima, sabia de cor, não só uma enormidade de números primos, mas também suas potências, como 337^6, por exemplo. Além disso, tinha uma habilidade estupenda para executar mentalmente cálculos extremamente elaborados. Suas obras completas ocupam mais de 70 volumes.

25.1 Algumas das contribuições de Euler

Euler contribuiu, de maneira decisiva em diversas áreas da Matemática, tais como geometria, cálculo e teoria de números. Foi o responsável pela integração das versões de Cálculo dadas por Leibniz e por Newton, introduzindo muitas novidades, tais como os fatores de integração das equações diferenciais. Estudou mecânica, considerando o chamado *Problema dos Três Corpos*, em sua versão mais simples. Isso é, Euler considerava o problema de determinar o movimento de um corpo de uma certa massa que se movimenta na presença do campo gravitacional de duas outras massas que estão fixas no espaço.

O *Problema dos Três Corpos* consiste em encontrar os movimentos subseqüentes de três corpos, determinados pelas leis da mecânica clássica (Leis de Gravitação, de Newton), dadas as posições iniciais, massas e velocidades.

Apenas as contribuições na área de Teoria de Números seria suficiente para garantir a Euler lugar no panteão dos matemáticos. Essas contribuições consistem de provas de teoremas formulados por Fermat.

As afirmações de Fermat chegaram até Euler pelas cartas de Christian Goldbach, que o conhecera pessoalmente. Essas cartas aguçaram a curiosidade de Euler que se envolveu profundamente com a área de Teoria de Números. Por exemplo, Goldbach perguntou sobre a conjectura proposta por Fermat, de que os números da forma $2^{2^n} + 1$ seriam primos. Euler concluiu que a afirmação é falsa, mostrando que $2^{32} + 1 = 4294967297$ é divisível por 641. Se você acha isso pouco, lembre-se que ele não dispunha de computadores.

Para ter uma idéia do feito, tente fatorar 307007 usando apenas papel e lápis! Voltaremos a falar um pouco mais sobre esse tema na última unidade didática.

Um dos grandes triunfos de Euler na Teoria de Números é a prova de que todo número perfeito par tem a forma descrita pelos antigos gregos, $2^{n-1}(2^n - 1)$, sempre que $2^n - 1$ for um número primo.

Outro resultado interessante, provado por Euler, é o chamado *Pequeno Teorema de Fermat*. Esse teorema afirma que, se a é um número inteiro dado qualquer e o primo p não é um de seus fatores, então p é um fator de $a^{p-1} - 1$. Esse resultado é, realmente, estupendo. Veja alguns exemplos:

a	p	$a^{p-1} - 1$	decomposição em fatores primos
2	13	$2^{13-1} - 1$	$3^2 \times 5 \times 7 \times 13$
8	5	$8^{5-1} - 1$	$3^2 \times 5 \times 7 \times 13$
10	7	$10^{7-1} - 1$	$3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$
2	41	$2^{41-1} - 1$	$3 \times 5^2 \times 11 \times 17 \times 31 \times 41 \times 61681$

Você deve ter notado que as duas primeiras linhas representam o mesmo número.

A *criptografia* estuda maneiras de codificar certos dados ou informações para que sejam decodificados apenas por pessoas específicas. A criptografia é muito antiga, mas nos dias de hoje ela ganhou um papel ainda mais importante, devido ao desenvolvimento tecnológico e da comunicação por computadores.

Resultados desse tipo ganharam, em nossos dias, um extra interesse devido a seu uso em *criptografia*. Voltaremos a falar sobre esse tema na última unidade didática.

Euler tentou mostrar que todo número inteiro positivo é a soma de quatro números inteiros elevados ao quadrado $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Por exemplo, $3 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$ e $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$. É claro que não há unicidade nessa representação pois, por exemplo, $13 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 3^2 + 2^2 + 0^2 + 0^2$. Apesar de seus progressos, essa façanha seria deixada para Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813).

Goldbach entrou para a história da Matemática com mais uma de suas perguntas. Em uma carta escrita em 7 de junho de 1724, pergunta a Euler se seria possível escrever qualquer número inteiro maior do que dois como a soma de três primos. Goldbach considerava o número 1 como um primo, coisa que não fazemos mais. Euler reapresentou a pergunta da seguinte forma: seria possível escrever qualquer número inteiro par como a soma de dois números primos? Por exemplo, $12 = 7 + 5$, $14 = 11 + 3$ e $1248 = 337 + 911$.

Essa questão continua desafiando os praticantes de teoria de números até esse momento!

25.2 Somas infinitas, mais uma vez ...

Jakob Bernoulli havia provado que a série harmônica diverge usando o fato de a soma dos inversos dos números triangulares ser igual a 2:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\cdots+\frac{2}{k\,(k+1)}+\ldots \;=\; 2.$$

O cálculo dessa soma fora o primeiro triunfo de Leibniz. A próxima pergunta era, naturalmente, a soma dos inversos dos números quadrados,

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$$

Nesse caso, o problema mostrou-se mais resistente. Veja, para cada inteiro positivo k,

$$\frac{1}{k^2} \;<\; \frac{1}{\dfrac{k\,(k+1)}{2}},$$

Como a série dos inversos dos números triangulares converge, a série dos inversos dos números quadrados também converge, uma vez que seu termo geral é menor.

Você se lembra do Teste da Comparação? A questão era descobrir o resultado da soma.

Ao resolver esse problema, em 1734, Euler estabeleceu definitivamente sua reputação como matemático genial. Ele começou observando que a soma daria, aproximadamente, 1.6449. Chegar a essa aproximação sem usar um computador ou mesmo uma calculadora de bolso já é um feito memorável. No entanto, essa aproximação não dá qualquer indicação de qual seria, exatamente, o resultado.

A solução dada por Euler usou o fato de que a função seno pode ser aproximada por polinômios:

$$\operatorname{sen} x \;=\; x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

Ele sabia que, se $P(x)$ é um polinômio tal que $P(0)=1$ e a, b, c, ..., d são raízes de $P(x)$, então podemos escrever

$$P(x) \;=\; \left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(1-\frac{x}{c}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{d}\right).$$

Atividade 29

Efetue

$$16\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{4}\right)\left(1+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

e mostre que suas raízes são $-2,\ 4$ e $\pm\sqrt{2}$.

Euler observou que

$$f(x) \;=\; \frac{\operatorname{sen} x}{x} \;=\; 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\dots$$

é tal que $f(0)=1$ e *deveria* ter raízes $\pm\pi$, $\pm 2\,\pi$, $\pm 3\pi$ e assim por diante. Portanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\,\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\,\pi}\right)\dots = \\ &= \left[1-\frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{4\,\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{9\,\pi^2}\right]\left[1-\frac{x^2}{25\,\pi^2}\right]\dots \end{aligned}$$

O próximo passo consiste em expandir o produto da direita e obter

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\dots \;=\; 1-\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\,\pi^2}+\frac{1}{9\,\pi^2}+\frac{1}{25\,\pi^2}+\dots\right)x^2+(\dots)\,x^4-\dots$$

A resposta está bem depois da próxima esquina! Comparando os coeficientes de x^2, Euler concluiu que

$$-\frac{1}{3!} \;=\; -\left(\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\,\pi^2}+\frac{1}{9\,\pi^2}+\frac{1}{25\,\pi^2}+\dots\right)$$

e, portanto,

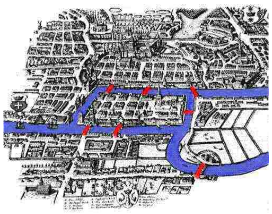
$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\dots \;=\; \frac{\pi^2}{6},$$

um resultado realmente surpreendente.

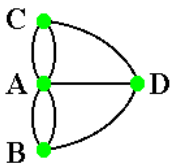
25.3 A aurora de uma nova teoria

A criatividade deu a Euler uma capacidade ímpar de resolver problemas. Ele era capaz de *ver* muito além do que estava ao alcance de seus contemporâneos. Seu nome estará para sempre associado ao nascimento da *Topologia*, uma área que só se desenvolveria plenamente no século 20, após a introdução da Teoria de Conjuntos, por Georg Cantor.

Euler resolveu, de maneira absolutamente genial, um antigo problema (mais um) conhecido como o *Problema das Pontes de Königsberg*. Essa cidade ficava, no início do século 18, na Prússia. Cortada pelo rio Pregel, que circunda uma ilha e divide-se numa bifurcação, as diferentes partes da cidade eram conectadas por sete pontes. O Problema das Pontes de Königsberg consistia em determinar se seria possível fazer um passeio completo pela cidade cruzando cada uma das sete pontes uma única vez.



Concentrando-se na essência do problema, Euler observou que a pergunta é equivalente a saber se o diagrama a seguir poderia ser percorrido, indo de um vértice a outro, percorrendo cada uma das arestas uma única vez.



Tais diagramas são conhecidos agora como *grafos*. Usando uma argumentação simples, porém efetiva, estabeleceu um critério matemático que determina se um tal diagrama pode ser percorrido dessa forma: passando por todas as arestas, percorrendo cada uma delas uma única vez.

Veja o Teorema de Euler:

> Teorema: Um grafo G admite um circuito euleriano se, e somente se, é conexo e todos os vértices têm grau par.

Basta observar que todos os vértices do grafo das Pontes de Königsberg têm grau ímpar, pois a cada um deles chega um número ímpar de arestas.

25.4 A equação $e^{i\,\pi} + 1 = 0$

Os matemáticos anteriores a Euler consideravam senos e cossenos como segmentos de retas relativos a arcos de um círculo de raio R. Foi ele que passou a considerar senos e cossenos como funções, exatamente como o fazemos hoje. Com a definição de Euler, a identidade trigonométrica fundamental

$$\operatorname{sen}^2 x \ + \ \cos^2 x \ = \ 1$$

é imediata.

Usando a unidade imaginária $i = \sqrt{-1}$, mais uma novidade introduzida por ele, deduziu a chamada *Identidade de De Moivre*,

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^n \ = \ \cos nx + i \operatorname{sen} nx.$$

Usando isso, deduziu as séries trigonométricas

$$\cos x \ = \ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

e

$$\operatorname{sen} x \ = \ x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Isso permitiu que estabelecesse a relação entre a função exponencial e as funções trigonométricas:

$$\cos x \ = \ \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$\operatorname{sen} x \ = \ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

e

$$e^{ix} \ = \ \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Em particular, para $x = \pi$, obtemos $e^{i\,\pi} + 1 = 0$.

Leonhard Euler trabalhou até seu último dia de vida. O planeta Urano havia sido recentemente descoberto e ele estava interessado no cálculo de sua órbita. Os problemas matemáticos nunca deixaram de interessar-lhe.

Atuou em todas as áreas da Matemática que eram conhecidas em seus dias, contribuindo substancialmente para elas. Não restringiu sua atenção apenas a questões de natureza estritamente matemática, mas dedicou-se também a problemas da mecânica e de outras áreas de natureza aplicada. Sua genialidade nos legou novos ramos da Matemática, grandes teoremas e diversos algoritmos, que enfatizam os aspectos aplicados e práticos da Matemática. Muitos deles são usados até hoje.

Euler fora contemporâneo de Johann Sebastian Bach, por exemplo, e possivelmente encontrara um de seus filhos, Karl Philip Emanuel, na corte de Frederico, o Grande, um dos déspotas iluminados da época, que poderia discutir filosofia com Voltaire ou executar ao violoncelo peças compostas exclusivamente para ele. No entanto, quando morreu, em 1783, uma nova ordem social estava prestes a se instalar no mundo. Três anos depois, em 1786, estrearia em Viena a ópera As Bodas de Fígaro, *de Wolfgang Amadeus Mozart, com libreto de Lorenzo da Ponte, baseada numa peça homônima de Beaumarchais. Um novo século estava por vir, trazendo muitas mudanças. A música seria outra. A figura matemática que dominaria a cena nesses dias de mudanças era Johann Carl Friedrich Gauss, que havia nascido em 1777.*

As grandes conquistas feitas no período de vida de Euler estabeleceram um patamar jamais sonhado na Matemática, mas estavam sujeitas a muitas críticas. Era preciso uma geração que se preocupasse com o rigor das teorias e que questionasse todos os seus fundamentos. Essa geração já estava a caminho e isso será o pano de fundo de nossa próxima unidade didática.

Unidade 8

Construção dos Números Reais – Cauchy e Dedekind

Nesta unidade didática você conhecerá como a Matemática se tornou, no decorrer do século 19, uma ciência mais abstrata e independente da realidade física.

Verá como a atividade matemática ganhou um caráter mais especializado, o que refletiu na divisão de áreas, como a Geometria e a Álgebra, em áreas mais específicas, assim como no surgimento de novos campos de interesse.

Texto 26: Uma Longa Jornada Rumo à Abstração

Nos dias de Euler, os problemas que ocupavam os matemáticos provinham, principalmente, da mecânica e da astronomia, além das questões de Teoria de Números.

Os matemáticos eram membros de academias científicas, raramente davam aulas e dedicavam todo o tempo às pesquisas. A maioria deles escrevia seus trabalhos em latim, a língua da ciência.

Essas características estavam prestes a se alterar, assim como haveria mudanças em outros setores da atividade humana, com a chegada do século 19.

Elas ocorreriam na ordem social, através de fenômenos como a Revolução Francesa (1789) e a Revolução Industrial. Esta, iniciada nos meados do século 18, na Inglaterra, espalhou-se por toda a Europa no decorrer do século 19 e chegou à América, por exemplo:

- em 1807, Robert Fulton construiu o primeiro barco a vapor;
- em 1814, George Stephenson construiu a primeira locomotiva a vapor;
- em 1836, Samuel Morse inventou o telégrafo.

A eletricidade passou a ser usada como fonte de energia após as descobertas feitas por Georg Simon Ohm, sobre a corrente elétrica, em 1827, e a divulgação das noções básicas de eletromagnetismo por Michael Faraday, em 1831.

As artes seriam palco de movimentos como o romantismo. Basta citar o poeta e cientista Johann Wolfgang von Goethe (1749 - 1832) e o compositor Ludwig van Beethoven (1770 - 1827), que viveram nesse período de transição. Na pintura, as obras de Joseph Turner (1775 - 1851) começam a apresentar indícios de mudanças, que culminariam no movimento impressionista.

Também as ciências seriam afetadas. Em 1859 o naturalista inglês Charles Darwin (1809 - 1882) abalou o mundo científico com a publicação de *A origem das espécies por meio da seleção natural*.

Na Matemática, os conceitos do Cálculo careciam de uma fundamentação mais sólida. Nesse sentido, as primeiras contribuições viriam de Gauss, com a noção de convergência de séries, que seria levado a termo com a criação da Análise Matemática, explicitada nos trabalhos de Cauchy, Weierstrass e Dedekind.

A Matemática ganharia maior abstração e especialização, e passaria a ser expressa na língua nativa dos matemáticos, facilitando sua divulgação.

Você já viu, na quarta unidade, como a questão do Quinto Postulado de Euclides acabou gerando novos tipos de geometrias. Na Álgebra, essa onda de abstração tomou a forma da teoria de grupos e surgiram os primeiros exemplos de produtos não-comutativos, algo que antes era inconcebível.

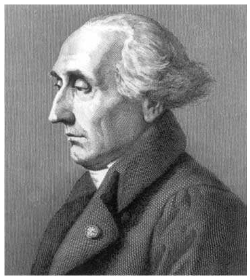
Os matemáticos passariam a ocupar posições nas universidades e outras escolas, como academias militares, assumindo o papel de professores.

A preocupação com o rigor no estabelecimento dos axiomas e definições, assim como nas argumentações, estaria mais em evidência.

É importante lembrar que nesse período, devido à maior divulgação científica e aos avanços sociais, as mulheres passaram a contribuir diretamente para a Matemática.

No entanto, tudo isso aconteceria aos poucos. Para entender melhor este período de transição, vamos falar da obra de um matemático que o viveu, mencionando algumas questões para as quais ele contribuiu.

26.1 Um matemático modesto – Joseph-Louis Lagrange



Joseph-Louis Lagrange

Em 12 de agosto de 1755, um jovem matemático de Turino, na época capital do reino da Sardenha, hoje na Itália, enviou uma carta a Euler descrevendo os resultados que obtivera sobre o problema da *tautócrona*, usando um método de determinar máximos e mínimos que desenvolvera.

Muito bem, ele se chamava Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) e o método é estudado nos cursos de Cálculo: *multiplicadores de Lagrange.*

Lagrange trabalhou em problemas de astronomia, mecânica, mecânica dos fluidos, probabilidade. Por exemplo, escreveu um trabalho explicando por que a lua exibe sempre a mesma face para a terra.

A tautócrona é a curva sobre a qual o período de oscilação (desprezados o atrito e a perda de energia) não depende da amplitude do movimento. Em outras palavras, se duas bolinhas forem soltas de diferentes pontos da tautócrona, chegarão ao seu ponto mais baixo no mesmo intervalo de tempo.

A palavra tautócrona provém do grego *tauto* e quer dizer mesmo, como em tautologia, e *cronos* significa tempo, como em braquistócrona. Bem, essa curva é (surpresa!) – a ciclóide e a carta impressionou Euler, que a respondeu em poucos dias.

Quando Euler retornou para São Petersburgo, Lagrange mudou-se para Berlim, ocupando a direção da Academia de Ciências, em 1766. Ele se mudou mais uma vez, em 1787, para Paris, onde permaneceu ativo até o fim da vida.

Criou uma teoria sistemática sobre as equações diferenciais, incluindo um método de resolução chamado *variação de parâmetros*. Publicou, em 1788, o livro *Mécanique analytique* (*Mecânica analítica*). Em *Réflexions sur la résolution algebrique des équations* (*Reflexões sobre a resolução algébrica das equações*) estudou a razão das equações de grau até 4 poderem ser resolvidas por radicais. Nesse trabalho considera as raízes de uma equação como quantidades abstratas, em vez de terem valores numéricos. Assim, foi o primeiro a estudar as permutações das raízes, o que levaria ao desenvolvimento da Teoria de Grupos, por Galois e Cauchy.

Uma permutação de um conjunto ordenado X é um novo arranjo de seus elementos. Por exemplo, se X é a tripla $(1, 2, 3)$, há seis permutações.

Lagrange produziu resultados importantes em Teoria de Números, como as provas de que todo número inteiro positivo é a soma de quatro números inteiros elevados ao quadrado ($5 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, $7 = 2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$) e, também, o Teorema de Wilson, que afirma:

p é primo se, e somente se, p divide $(p - 1)! + 1$.

Atividade 30

Encontre o raio e a altura do cilindro circular reto aberto de maior área que pode ser inscrito em uma esfera de raio r, usando multiplicadores de Lagrange.

Atividade 31

Verifique o Teorema de Wilson para os números 4, 5, 6 e 7.

Atividade 32

Escreva 99 como a soma de quatro quadrados de três maneiras diferentes.

Você já sabe como foi importante a atuação de Carl Friedrich Gauss na resolução dos três clássicos problemas da Matemática, apresentados na primeira unidade didática, além de suas contribuições para a questão do Quinto Postulado de Euclides.

No próximo texto, conhecerá outros resultados associados a Gauss, um dos maiores matemáticos de todos os tempos.

Uma de suas frases mais marcantes é :

"A Matemática é a rainha das ciências, e a Aritmética, a rainha da Matemática."

Texto 27: Ligget se', disse o jovem Gauss

Nascido de pais muito simples, Gauss foi reconhecido como uma criança prodígio e recebeu ajuda do Duque de Brunswick. Estudou na Universidade de Göttigen e obteve seu doutorado pela Universidade de Helmstedt, no ano de 1799. De 1807 até sua morte, em 1855, trabalhou como professor, astrônomo e diretor do observatório da Universidade Göttigen.

É folclórica a história de como Gauss, ainda um garoto de dez anos, impressionou seu professor da escola primária. O professor, aparentemente, pretendia manter os alunos ocupados por algum tempo e mandou-os somar os números inteiros de 1 até 100. Mal havia enunciado o problema e o jovem Gauss colocou sua lousa sobre a mesa, dizendo – *ligget se'* –, algo assim como – *aqui está [a resposta]*. O professor, evidentemente, não podia crer que Gauss tivesse a resposta correta, mas para a sua surpresa, lá estava: 5050. É claro que o padrão de crescimento constante da série de números não passou despercebido ao menino. Ele notou que a soma de elementos em posições simétricas é constante: $1 + 100 = 101$,

$2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$ etc. Como há 50 parcelas desse tipo,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100 \;=\; 50 \times 101 \;=\; 5050.$$

27.1 O Teorema Fundamental da Álgebra

Carl Friedrich Gauss foi, muito possivelmente, um dos maiores matemáticos de que temos notícia. Seus trabalhos conservam alguns traços da Matemática do século 18: ele se dedicou tanto à Matemática *pura* como à *aplicada*, viveu relativamente isolado, ocupava-se de problemas ligados à astronomia e escrevia os trabalhos em latim. O escopo de sua obra é imenso, apesar do número limitado de publicações. Lembremo-nos de um de seus motos: *pouca sed matura (pouco, porém maduro)*.

Gauss tinha uma enorme preocupação com o rigor, uma das características que marcaria a Matemática do século 19.

Em sua juventude, provaria muitos resultados que já haviam sido descobertos anteriormente, além de alguns por ele mesmo. No entanto, suas demonstrações eram, em geral, mais rigorosas e completas do que as de seus antecessores. Ele estudou as obras dos matemáticos do passado e era bem crítico. Na verdade, a insatisfação com as argumentações anteriores era uma fonte de motivação.

Euler, Laplace, Lagrange e Legendre eram agraciados por Gauss com o elogio *clarissimus*, em latim, é claro. Newton, no entanto, era considerado *sumus*.

Sua preocupação com o rigor teve grande influência na atitude geral dos matemáticos a partir de então, devido à sua reconhecida importância.

No diário em que registrava suas descobertas, em 10 de julho de 1796, está escrito:

$$\mathrm{E\Upsilon PHKA}\ ! \quad \mathrm{num} \;=\; \Delta + \Delta + \Delta.$$

Gauss acabara de provar que todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma de três números triangulares. Isto é, os números 0, 1, 3, 6, 10, 15, $\ldots$

Por exemplo, $28 \;=\; 1 + 6 + 21$.

Essa descoberta foi tão importante que ele a saudou com a arquimediana exclamação: eureka!

Sua estréia na carreira matemática não poderia ter sido mais impressionante: após um período de perto de 2000 anos, alguém descobre mais um polígono regular que pode ser construído com régua e compasso: o heptadecágono, um polígono de 17 lados. A solução desse problema é equivalente a chegar ao seguinte resultado:

$$16\cos\frac{2\pi}{17} = -1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}.$$

Em sua tese de doutorado ele demonstra o chamado Teorema Fundamental da Álgebra, que pode ser apresentado como:

> Toda equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes complexas ou reais, coincidentes ou distintas.

Na verdade, há outras formulações equivalentes do teorema. Uma delas diz que toda equação polinomial de coeficientes reais pode ser expressa como o produto de fatores lineares ou quadráticos (irredutíveis) com coeficientes reais.

Por exemplo, $3x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 8x - 2 = (3x-1)(x^2+2x+2)(x-1)^2$. Note que $x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 + 1 = (x+1)^2 + 1$ é irredutível, isto é, não tem raízes reais, e o fator $(x-1)$ tem multiplicidade 2.

Antes de Gauss, vários matemáticos haviam tentado demonstrar este teorema, como Jean d'Alembert (1717 - 1783), que enunciou o teorema e tentou uma demonstração, sem sucesso.

Euler (é claro) mostrou a validade do teorema para polinômios de grau até 6 e tentou uma demonstração para o caso geral.

Em sua dissertação, apresentada em 1799, Gauss critica as provas dadas anteriormente. Sobre a prova de d'Alembert, afirma: *uma prova rigorosa poderia ser construída nestas mesmas bases*. A prova dada por Gauss é de natureza topológica e também é passível de crítica, sob nosso ponto de vista. De qualquer forma, em 1816, Gauss publicou uma segunda prova, seguindo a abordagem dada por Euler. Essa prova é correta.

Como era típico, retornou ao tema e, ainda em 1816, apresentou uma terceira prova, que também é de natureza topológica.

Atividade 33

Fatore (segundo o Teorema Fundamental da Álgebra) os seguintes polinômios: x^2-1, x^3-1, x^3+1, x^4-1, x^4+1.

27.2 Investigações Aritméticas

Em 1801, Gauss publicou o livro *Disquisitiones Arithmeticae (Investigações Aritméticas)*, um texto sobre Teoria de Números que é um marco na literatura matemática (escrito aos 24 anos), em que apresenta, de maneira organizada, resultados obtidos por estudiosos como Fermat, Euler, Lagrange e Legendre, além de novos e importantes resultados.

Gauss introduziu a noção de *congruência* entre dois números inteiros: sejam a, b e m números inteiros diferentes de zero. Dizemos que a é *congruente* a b módulo m se m dividir a diferença $a - b$, e escrevemos

$$a \equiv b \mod m.$$

Por exemplo, $13 \equiv 2 \mod 11$ e $25 \equiv 1 \mod 4$. Esse conceito parece muito abstrato, à primeira vista, mas todo mundo conhece e usa com desenvoltura alguns exemplos. Veja, quem nunca brincou de *par ou ímpar*, ou *zerinho ou um*, como as crianças dizem agora? Isto é, cada número inteiro é congruente módulo 2 a 0 ou a 1, e isso divide os inteiros em dois tipos: pares e ímpares.

Outro caso conhecido é a maneira como contamos as horas do dia, tomando-as módulo 12 ou 24, ou os minutos, que tomamos módulo 60.

Usando essa linguagem, Gauss apresenta no *Disquisitiones Arithmeticae* o Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Wilson e outros resultados de forma organizada e sistemática.

Po exemplo, a conclusão do Pequeno Teorema de Fermat: se p é primo e a é um inteiro qualquer, então p divide $(a^p - a)$, pode ser escrita usando a noção de congruência como $a^p = a \mod p$.

Gauss foi o primeiro matemático a enfatizar a importância da propriedade de fatorização única dos números inteiros em fatores primos, conhecida como o Teorema Fundamental da Aritmética, que ele enunciou e provou explicitamente. Esse fato já havia sido usado na demonstração da infinitude dos primos, por Euclides.

No início do *Disquisitiones Arithmeticae* Gauss aborda a questão da resolução de equações do tipo

$$ax \equiv b \mod m,$$

chamadas congruências lineares.

As equações lineares são as mais simples que podemos esperar. Por exemplo, em $\mathbb{R}$, a equação

$$a\,x = b, a \neq 0,$$

sempre tem solução, que é *única*: $x = \dfrac{b}{a}$.

No entanto, no caso das congruências lineares, mesmo essas equações podem nos reservar algumas surpresas. Como exemplo, vamos analisar as equações

$$2\,x \equiv b \mod 6,$$

para diferentes valores de b.

Devido às congruências, basta tomarmos $b = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5, os possíveis restos de divisões por 6.

Muito bem, se $b = 1, 3$ ou 5, a equação $2\,x \equiv b \mod 6$ não tem solução, como você pode testar por inspeção direta, para $x = 0, 1, 2, 3, 4$ ou 5. Contudo, para os casos de $b = 0, 2$ ou 4, a equação terá *duas* soluções. Veja: $2\,x \equiv 4 \mod 6$ tem soluções 2 e 5, pois $2 \times 2 = 4$ e $2 \times 5 = 10 = 4 + 6 \equiv 4 \mod 6$.

O estudo das congruências lineares $a\,x \equiv b \mod m$ se resume à análise do máximo divisor comum de a e m, denotado por $d = (a, m)$. A equação terá solução apenas no caso de d dividir b: $d \mid b$. Além disso, se $d \mid b$, o número de soluções será d.

No exemplo $2\,x \equiv b \mod 6$, o máximo divisor comum de 2 e 6 é 2 ($d = 2$). Assim, como 2 não divide $1, 3$ ou 5, a equação não tem solução no caso de b ser congruente módulo 6 a algum desses números. Em contrapartida, 2 divide $0, 2$ e 4 e a equação tem duas soluções distintas sempre que b for congruente módulo 6 a algum desses números.

Atividade 34

Determine todas as possíveis soluções de cada uma das congruências lineares a seguir:

$$4\,x \equiv 6 \mod 18; \qquad 4\,x = 8 \mod 12; \qquad 2\,x = 7 \mod 13.$$

Equações lineares com mais de uma solução indicam que há algo de novo no ar. Imagine, então, lidar com congruências quadráticas. Resolver esse tipo de equação é a novidade do livro: a *Lei da Reciprocidade Quadrática*, chamado *Theorema Aureum*, por Gauss. Esse resultado já havia sido descoberto por Euler e Legendre, mas ambos falharam em suas demonstrações. Gauss tinha fascinação por esse teorema, para o qual deu diversas demonstrações, ao longo de sua vida.

A questão se resume em lidar com equações do tipo

$$x^2 \equiv a \mod m.$$

Se a equação tem solução, dizemos que a é um *resíduo quadrático* de m. Por exemplo, 1 e -1 são resíduos quadráticos de 5, uma vez que $4^2 = 16 = 5\times 3+1$ e $2^2 = 4 = 5 \times 1 - 1$.

Como é comum nas questões de Teoria de Números, o problema pode ser reduzido aos números primos.

Os possíveis restos da divisão por 4 são 0, 1, 2 e 3. Portanto, há quatro classes de congruência módulo 4. Assim, os números ímpares se dividem em duas classes, aqueles que são da forma $4k + 1$ são congruentes a 1 mod 4; os da forma $4l + 3$ são congruentes a $3 \mod 4$.

Dados dois números primos p e q, a Lei da Reciprocidade Quadrática diz que as congruências $x^2 \equiv p \mod q$ e $x^2 \equiv q \mod p$ são ambas solúveis ou ambas insolúveis, no caso em que p e q sejam congruentes a $1 \mod 4$. No caso de p e q serem congruentes a $3 \mod 4$, uma das equações terá solução e a outra não. Há uma formulação muito sintética desse teorema usando o símbolo de Legendre. (Veja, por exemplo, o livro *Introdução à Teoria dos Números*, de J. P. de Oliveira Santos, da Coleção Matemática Universitária, IMPA).

27.3 Outras contribuições de Gauss

Após a publicação do *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss voltou-se para questões de natureza mais aplicada. Em 1 de janeiro de 1801, ano da publicação desse livro, o astrônomo Giuseppe Piazzi descobriu um planetóide que denominou Ceres, mas só conseguiu observar 9 graus da órbita, antes que ele desaparecesse atrás do sol.

Usando essas informações, vários astrônomos calcularam sua órbita e fizeram previsões sobre onde ele reapareceria. A previsão de Gauss era muito diferente das outras e (quem diria?) foi confirmada, em 7 de dezembro de 1801. Apesar de não divulgar como fizera os cálculos, ele havia usado uma técnica que desenvolvera, chamada *método dos mínimos quadrados*.

Seu segundo livro, *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis so-*

lem ambientium (Teoria do movimento dos corpos celestes por seções cônicas), publicado em 1809, é um tratado sobre os movimentos dos corpos celestes.

Gauss tinha um grande interesse em Geometria Diferencial, devido a seus trabalhos com geodésicas. Sua maior contribuição a esse campo foi a obra *Disquisitiones generales circa superficies curva*, de 1828, em que aparecem a noção de curvatura gaussiana e o famoso *Teorema Egregrium (Teorema Notável)*.

O teorema afirma que a curvatura de uma superfície é uma propriedade intrínseca a ela. Isso quer dizer que é possível determinar a curvatura de uma superfície, isto é, como ela se curva dentro do espaço tridimensional no qual está mergulhada, usando apenas medidas de ângulos e distâncias na própria superfície.

O teorema é notável porque a definição da curvatura gaussiana faz uso da função (mergulho) da superfície no espaço tridimensional.

A partir de 1831, com a chegada a Göttingen do físico Wilhelm Weber, Gauss interessou-se pelas pesquisas sobre a teoria do campo magnético terrestre e escreveu vários trabalhos sobre o assunto.

27.4 Matemática a distância

Gauss manteve correspondência com vários matemáticos, entre eles Gotthold Eisenstein (1823 - 1852), que o visitou em Göttingen, por duas semanas em junho de 1844. Gauss tinha grande admiração por Eisenstein, que lamentavelmente teve uma carreira muito breve.

Além de Eisenstein, Gauss correspondeu-se por um bom tempo com um jovem matemático francês, Monsieur Le Blanc. Esse era, no entanto, o pseudônimo de Marie-Sophie Germain (1776 - 1831), uma jovem e talentosa matemática francesa, que usava o nome Le Blanc para vencer as barreiras colocadas pela sociedade daquela época.

Em 1830, graças aos esforços de Gauss, a Universidade de Göttingen concordou em conceder a Sophie o doutorado, mas ela faleceu antes de receber a honraria.

Gauss soube a respeito de sua verdadeira identidade em 1806.

Dois dos mais famosos alunos de Gauss foram Bernhard Riemann e Richard Dedekind, de quem falaremos no próximo texto.

Texto 28: Cortes de Dedekind

Richard Dedekind
(1831 - 1916)

Com a onda de rigor que percorria a Matemática, fortemente influenciada pelas contribuições de Gauss, uma questão que mais uma vez se apresentava era a necessidade de estabelecer uma correspondência definitiva entre os números e a reta, estabelecendo em definitivo o que chamamos de conjunto dos números reais – um desafio quase tão velho quanto a Matemática. Os números racionais são mais fáceis de estabelecer, a partir dos números inteiros, e bastam para o nosso dia-a-dia. No entanto, como a questão da não-racionalidade de $\sqrt{2}$ mostrou, eles não são suficientes para *medir* tudo.

A convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$ para $\dfrac{\pi^2}{6}$, mostrada por Euler, por exemplo, pode ser usada para *definirmos* assim esse número, mas o procedimento não é prático.

A formulação de uma teoria que colocasse um ponto final sobre a questão da existência de números irracionais (pelo menos do ponto de vista da Matemática) viria dos trabalhos de Dedekind, o último aluno de Gauss.

Ele se interessou por essa questão quando ensinou Cálculo, pela primeira vez. A idéia lhe ocorreu no dia 24 de novembro de 1858 e consiste em representar cada número real como uma divisão, um *corte* nos números racionais. Isto é, todo número real r *divide* os números racionais em duas partes distintas, os maiores e os menores do que ele.

Um *corte de Dedekind* é um par ordenado (A, B), no qual A e B são subconjuntos não-vazios de números racionais, tais que A não possui elemento máximo, a união de A e B é o conjunto de todos os racionais e, dados $x \in A$ e $y \in B$ quaisquer, $x < y$.

Essas idéias foram publicadas, em 1872, no trabalho *Stetigkeit und Irrationale Zahlen (Continuidade e Números Irracionais)*:

> Em cada caso em que há um *corte* (A_1, A_2) que não é produzido por qualquer número racional, então criamos um novo número a, irracional, que será considerado como completamente definido por este corte; diremos que este número a corresponde a este corte, ou é por ele produzido.

Além dessa importante contribuição à Matemática, Dedekind nos legou a definição de conjuntos finito e infinito, assim como trabalhos em Teoria de Números. Ele também introduziu a noção algébrica de ideal, que tem papel de destaque na teoria de anéis, mais tarde desenvolvida por Hilbert e, posteriormente, por Emmy Noether. Dedekind foi grande amigo de Georg Cantor, de cuja obra falaremos na próxima unidade didática.

Atividade 35

Seja $A = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x^2 < 2\,\}$ e seja $B = \{x \in \mathbb{Q}\,;\, x^2 > 2\,\}$. Mostre que (A, B) é um corte de Dedekind. A qual número real esse corte corresponde?

Cauchy é louco e não há nada que se possa fazer sobre isso, apesar de, atualmente, ele ser a única pessoa a saber como Matemática deve ser feita.

Niels Abel

Augustin Louis Cauchy

Cauchy era um dos responsáveis pela aprovação de um importante trabalho de Abel para a publicação. O trabalho havia sido submetido em 1826 e quando Abel faleceu, em abril de 1829, Cauchy ainda não havia dado seu veredito.

Texto 29: Augustin Louis Cauchy

A frase de Niels Abel (1802 - 1829), um matemático norueguês que conheceu Cauchy quando visitou Paris para tentar a sorte, o descreve bem, apesar de sua contundência.

Nascido em Paris, no ano da Revolução Francesa, Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) foi um matemático que se dedicou ao ideal de rigor na Matemática. Suas aulas de Cálculo não faziam sucesso entre os alunos pois ele insistia em provar *rigorosamente* cada um dos teoremas que citava.

Apesar dessa baixa popularidade, Cauchy legou enormes contribuições em Análise. Entre elas podemos citar uma primeira definição de continuidade de funções (que seria colocada em termos dos famosos ε e δ – épsilon e delta – por Weierstrass).

29.1 A definição de limite, segundo Cauchy

O ponto fraco de toda a teoria criada por Newton e Leibniz e posteriormente desenvolvida por Euler e tantos outros estava na falta de uma definição precisa do limite, tão necessário para lidar com as *quantidades infinitamente pequenas*, seja lá o que isso pudesse querer dizer.

Newton usava a noção de *razão última de quantidades que desaparecem:*

> "[...] deve ser entendido como a razão última das quantidades, não antes delas desaparecerem, não depois, mas aquela na qual elas desaparecem."

Leibniz fala de *quantidades infinitamente pequenas*. Isto é, quantidades que, apesar de não serem iguais a zero, não podem ser tomadas ainda menores. Algo como os átomos, da Química, suas quantidades infinitamente pequenas eram como blocos indivisíveis, a coisa mais próxima a zero.

É claro que esse tipo de definição dava margem a preocupações e críticas, sendo de George Berkeley as mais severas.

Cauchy apresentou sua contribuição:

> Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma particular variável aproximarem indefinidamente um valor fixo, de forma que a diferença se torne tão pequena quanto se queira, essa última é chamada *limite* de todas as outras.

Na verdade, esta definição apresentou imensos progressos, pois contém as idéias principais do limite: a noção de *proximidade* e o famoso *tão pequeno quanto se queira*.

Cauchy ainda nos legou o critério de convergência de seqüências, que leva seu nome, assim como uma extensão do Teorema do Valor Médio. Suas contribuições para a análise complexa também foram profundas, como o Teorema de Resíduos. O chamado Teorema da Integral de Cauchy tem uma fórmula muito bonita:

> Se $f(z)$ é uma função analítica definida em uma região simplesmente conexa R, então
>
> $$\oint_\gamma f(z)\,dz \;=\; 0$$
>
> para qualquer contorno fechado γ completamente contido em R.

Um matemático que não é, também, algo de poeta,
nunca será um perfeito matemático.

Karl Weierstrass

Texto 30: Weierstrass – Um Grande Professor

Weierstrass teve uma vida relativamente desregrada durante seus anos na universidade, em Bonn. Dos 26 anos até o momento que sua primeira publicação lhe rendeu uma posição universitária, ele foi professor de ensino médio.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897), ao contrário de muitos matemáticos, que começaram suas carreiras logo na juventude, iniciou sua produção científica relativamente tarde, por volta dos quarenta anos.

O interesse por Matemática ocorrera desde cedo, mas esse início tardio foi devido, muito provavelmente, à oposição que seu pai fazia para que ele se tornasse matemático. De qualquer forma, a Matemática não perdeu por esperar. Weierstrass foi um matemático excelente. Por exemplo, em 1861 deu um exemplo de uma função contínua que contrariava todas as expectativas dos analistas matemáticos. Veja, cada aluno de Cálculo sabe que a função $f(x) = |x|$ é um exemplo de uma função contínua não diferenciável. Isso ocorre devido ao *bico* que seu gráfico apresenta, na origem. Ou seja, a função não é diferenciável *apenas* na origem. O exemplo de função dado por Weierstrass, apesar de contínua, não é diferenciável em *qualquer* ponto de seu domínio. Tal função é obtida como o limite de uma seqüência de funções que converge *uniformemente*. Isso garante sua continuidade. A função é definida por

$$f(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\big(\pi\, k^2 x\big)}{\pi k^2}.$$

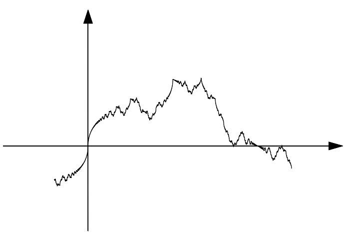


Gráfico de f.

O padrão de rigor estabelecido por Weierstrass teve profundo efeito na Matemática. Ele definiu números irracionais como limites de séries convergentes, convergência uniforme, funções definidas por produtos infinitos, teste de convergência de séries e várias outras coisas. Os alunos de Cálculo o conhecem por sua genial técnica para integrar funções racionais de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, chamada de *arco metade*, baseada na igualdade $t \;=\; \operatorname{tg}(x/2)$, que acarreta

$$\operatorname{sen} x \;=\; \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{e} \quad \cos x \;=\; \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

30.1 A definição de limite, segundo Weierstrass

A partir da abordagem de Cauchy, Weierstrass estabeleceu a definição de limite que todos aprendem em Cálculo ou Análise.

Ao dizermos "*limite* de $f(x)$ quando x tende a a é L" estamos dizendo:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, } 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x)-L| < \varepsilon.$$

Leia: para todo *épsilon* maior do que zero, existe *delta* maior do que zero tal que, se $0 < |x-a| < \delta$, então $|f(x)-L| < \varepsilon$

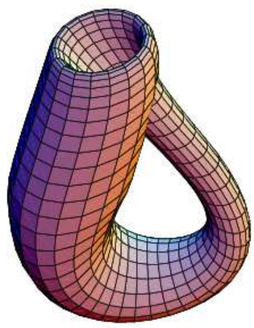
Note: $0 < |x-a| < \delta$ quer dizer "x pertence ao intervalo $(a-\delta,\, a+\delta)$ mas é diferente do próprio a". Analogamente, $|f(x)-L| < \varepsilon$ quer dizer "$f(x)$ pertence ao intervalo $(L-\varepsilon,\, L+\varepsilon)$". Eis aqui a noção de distância, tão importante para se estabelecer o limite. A grande diferença entre a abordagem de Cauchy e de Weierstrass é que esta última é simbólica, tornando precisa a noção *tão pequeno quanto se queira*. O que *anima* a definição dada por Weierstrass é o símbolo $\forall$. Para que a definição seja satisfeita, devemos mostrar que é verdadeira *para todo* $\varepsilon > 0$, os grandes e os pequenos.

Quando a definição se cumpre, usamos a notação

$$\lim_{x \to a} f(x) \;=\; L.$$

30.2 Alunos de Weierstrass

O número de alunos de Weierstrass é grande e entre eles figuram alguns dos maiores matemáticos da nova geração. Só para citar uns poucos, temos Marius Sophus Lie, Gösta Mittag-Leffler, Georg Frobenius, Hermann Minkowski, Hermann Schwarz. Um deles, Felix Klein, trabalhou em geometrias não-euclidianas, teoria de grupos e propôs o chamado *Erlangen Programme*, para classificar geometrias pelo correspondente grupo de simetrias. Klein é particularmente conhecido dos alunos de topologia pela sua famosa garrafa, um exemplo de superfície fechada não orientável.



Garrafa de Klein

Outros destacados estudantes foram Sonya Kovalevskaya, Georg Cantor. Kovalevskaya recebeu o doutorado da Universidade de Göttingen e uma posição em Estocolmo com a ajuda do mestre. É famosa por suas contribuições na teoria das equações diferenciais parciais.

As inestimáveis contribuições de Cantor, assim como de Hilbert, serão abordadas na próxima unidade didática.

Unidade 9

Teoria de Conjuntos e Números Transfinitos de Cantor

Nesta unidade didática você conhecerá como as contribuições de Cantor e de Hilbert ajudaram a moldar o desenvolvimento da Matemática no século 20.

Um velho conhecido dos matemáticos mais uma vez ocuparia um lugar de destaque nos seus problemas. Veja a frase de Hilbert:

"O infinito! Nenhuma outra questão jamais moveu tão profundamente o espírito humano."

Texto 31: O Surgimento de uma Nova Matemática

O século 19 fora particularmente propício para a Matemática. Desde os trabalhos de Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830), sobre a teoria do calor, que resultou na publicação de *Théorie analytique de la chaleur (Teoria analítica do calor)*, em 1822, passando pela obra monumental de Gauss, dos trabalhos de Bolyai e Lobachevsky sobre geometria não-euclidiana, tudo o que se via era novas idéias e resultados.

Vieram à luz contribuições para a Álgebra, com os trabalhos de Evariste Galois (1813 - 1832) e de Niels Abel (1802 - 1829).

O primeiro exemplo de um produto não comutativo foi dado em 1843, por William Rowan Hamilton (1805 - 1865). Ele introduziu a noção de números quatérnios, que generaliza o conceito de números complexos.

A análise matemática foi estabelecida, de início com os trabalhos de Cauchy, que partira da noção de função dada por Lagrange. Esse trabalho seria completado por Weierstrass e Riemann. Cauchy também desenvolveu a teoria das funções de uma variável complexa.

Além de Weierstrass, questões sobre os números reais haviam recebido as contribuições de Dedekind.

Enfim, tudo parecia estar assentado e resolvido. No entanto, muitas novidades ainda estavam por vir. As noções de estruturas algébricas dariam à Álgebra um caráter ainda mais abstrato. Essa noção não ficaria, no entanto, limitada à Álgebra. Surgiram a Análise Funcional, a Teoria de Medida e a integral de Lebesgue. Topologia Algébrica e Diferencial surgiriam como fortes áreas de pesquisa, além de outras, como a que chamamos Sistemas Dinâmicos.

A comunidade se dividiria em debates, tomando posições sob nomes tais como formalismo, intuicionismo e logicismo. Mas, antes que tudo isso tomasse forma, a comunidade matemática teria que assistir à criação da teoria de conjuntos. Os questionamentos que ela acarretaria marcariam, de maneira indelével, a virada do século 19 para o século 20.

31.1 A universalização da Matemática

Um fenômeno importante marcou a Matemática nas primeiras décadas do século 20. Você deve ter percebido como, ao longo da história, a atividade matemática concentrou-se em algumas partes do mundo. Na época do Renascimento, a Itália foi o palco dessa atividade que, com o tempo, mudou-se para a França e, depois, para a Alemanha. Nos fins do século 19, a atividade matemática concentrava-se nos países europeus, principalmente na França e Alemanha, e era praticada, essencialmente, por matemáticos.

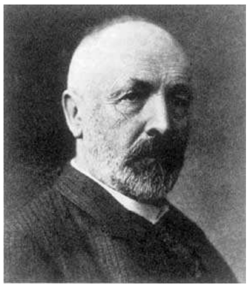
Com a chegada do século 20, houve mudanças dramáticas. Basta lembrar que entre 1914 e 1945 ocorreram dois conflitos de proporções continentais. Como conseqüência de todas essas transformações, a Matemática ganhou um caráter mais universal. Por exemplo, os Estados Unidos da América receberam cientistas europeus, e muitos matemáticos entre eles. Outros países passaram a contribuir com grandes nomes para a Matemática, como o Japão e a Rússia.

Além disso, por ser uma ciência básica, a Matemática pôde se desenvolver com facilidade em países em desenvolvimento. Assim, Índia, Brasil, México e países do leste europeu também colaboraram para o avanço da Matemática.

No próximo texto, você conhecerá as idéias principais de Cantor a respeito do infinito. A ferramenta que ele desenvolveu para lidar com essa questão ficou conhecida como a Teoria de Conjuntos.

A teoria desenvolvida por Cantor encontrou muita resistência antes de ser aceita, mas acabou se impondo.

Texto 32: O Infinito Contra-ataca



Georg Cantor nasceu em 3 de março de 1845,em São Petersburgo, filho de um casal de amantes da arte e da cultura. Cantor sabia tocar violino e, além da Matemática, tinha um grande interesse por filosofia e por literatura. Formou-se na Univesidade de Berlim e passou sua vida como professor na Universidade de Halle.

A teoria de conjuntos desempenha papel relevante na abordagem de questões envolvendo noção de infinito e surgiu, como assunto de pesquisa, por volta de 1874, criada por Georg Cantor, um dos matemáticos mais originais de que se tem notícia. Com o passar do tempo, tornou-se a linguagem com a qual expressamos a Matemática.

No passado, antes do aparecimento da teoria de conjuntos, os matemáticos lidavam com números, figuras geométricas, equações etc. A mesma coisa ocorre hoje, com a diferença que, agora, os números são elementos de conjuntos, as figuras geométricas são vistas como subconjuntos do plano, e o próprio plano considerado como um conjunto. As equações estabelecem condições que definem conjuntos.

Podemos dizer que os objetos com que os matemáticos lidam são conjuntos, seus elementos e suas propriedades, assim como com as relações entre eles.

E tudo isso começou com Cantor. Como matemático ele sempre foi genial, mas os trabalhos que antecederam a teoria de conjuntos não levavam a crer que pudesse produzir matemática de tamanha originalidade. Aqui está uma de suas frases mais bonitas:

> "A essência da Matemática é a sua liberdade."

Nenhuma nova teoria, porém, que carregue tanta originalidade, é recebida sem resistência. As idéias de Cantor receberam oposição, principalmente de um dos líderes da comunidade matemática daquela época: Leopold Kronecker (1823 - 1891).

Kronecker era um homem rico, um grande matemático, e chegara a uma posição de destaque na Universidade de Berlim por seus próprios méritos. Por que, então, fazia tanta oposição a Cantor? No cerne da disputa estava uma questão quase tão antiga quanto a própria Matemática: finito versus infinito.

Você já viu como essa questão desempenhou papel importante em diferentes períodos da história. Basta lembrar de Zenão e seus paradoxos.

O infinito, porém, foi adotado e usado por matemáticos geniais, como atestam os trabalhos de Eudoxo e Arquimedes, na Antigüidade, e a obra de Newton e Leibniz, que criaram o cálculo diferencial e integral.

O próprio Gauss tinha reservas sobre o tema:

> "[...] Eu protesto sobretudo contra o uso de uma quantidade infinita como algo *completo*, que em Matemática nunca é permitido. O Infinito é apenas uma maneira de falar [...] "

Cantor estava disposto a considerar, por exemplo, o conjunto de *todos* os números como um objeto matemático legítimo. Assim entendemos a resistência que a teoria de conjuntos recebeu do segmento liderado por Kronecker. Era uma questão de princípios. Kronecker acreditava que a Matemática deveria lidar com um número finito de objetos e com procedimentos que envolvessem apenas um número finito de passos.

A respeito desse fenômeno completamente novo, que distinguia não só entre coleções finitas e infinitas, mas entre coleções com infinitos elementos, Cantor escreveria ao seu amigo matemático Julius Dedekind –
"Vejo, mas não posso acreditar!"

No próximo texto você conhecerá mais detalhes dessa história.

Texto 33: Como contar infinidades?

Quando queremos comparar duas classes de coisas, temos a tendência de contar o número de cada uma delas. Ao contarmos cinco dedos em cada mão, sabemos que temos o mesmo número de dedos em cada uma delas. Mas, essa não é a única maneira de fazer isso. O chefe de uma tribo de nativos de certa ilha, que não dispõe de números para contar, pode, ainda assim, determinar se uma família é maior ou menor do que uma família rival. Basta que ele faça com que as duas famílias se disponham em duas filas paralelas. Se a cada membro de uma das famílias corresponder um membro da outra, elas têm o mesmo número de elementos. Caso contrário, o chefe poderá perceber qual das duas é maior.

Cantor explorou essa idéia estabelecendo o seguinte:

> Dois conjuntos M e N são *equivalentes* se é possível colocá-los, por alguma lei, em tal relação um com o outro, de tal forma que a cada elemento de um deles corresponde um e somente um elemento do outro.

Usando a linguagem atual, dizemos que, nesse caso, os conjuntos M e N têm a mesma *cardinalidade*.

Por exemplo, observe que podemos estabelecer uma correspondência um-a-um entre os números naturais e os números pares, através da lei $n \mapsto 2n$.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots \end{array}$$

Cantor estabeleceu que todo conjunto cujos elementos podem ser colocados em correspondência um-a-um com os números naturais é dito *enumerável*, tem a mesma cardinalidade do conjunto dos números naturais, que ele denotou $\aleph_0$. Assim ele introduzia um novo cardinal, *transfinito*.

O símbolo $\aleph_0$ deve ser lido "alef-zero". Alef ($\aleph$) é a primeira letra do alfabeto hebraico.

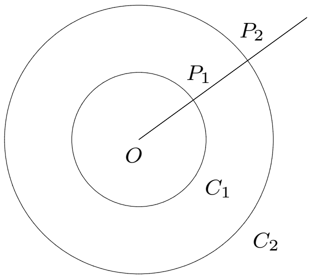
Atividade 36

Estabeleça uma correspondência um-a-um entre os conjuntos de números naturais e inteiros.

33.1 A enumerabilidade dos números racionais

Usando essa definição de cardinalidade, alguma luz pode ser lançada sobre o *Paradoxo de Galileu*:

Considere C_1 e C_2 dois círculos concêntricos, um com raio igual ao dobro do outro. A circunferência do círculo de raio maior é o dobro da circunferência do outro. Apesar disso, para cada ponto na circunferência menor corresponde um único ponto da circunferência maior, e vice-versa. Basta tomar, para cada ponto P_1 da circunferência menor, o raio OP_1 e prolongá-lo até a circunferência maior, determinando seu ponto correspondente P_2. Veja bem, apesar de uma circunferência ser o dobro da outra, ambas são conjuntos de mesma *cardinalidade*.



Este tema havia sido considerado por Bernard Bolzano (1781 - 1848), um teólogo, filósofo e matemático tcheco que acreditava no conceito de infinito. Foi ele quem estabeleceu a diferença entre as coleções finitas e infinitas. Uma coleção infinita pode ser colocada em correspondência um-a-um com uma de suas partes próprias, como atesta o exemplo de correspondência entre os naturais e os pares.

Isto, definitivamente, não ocorre com coleções finitas. Por exemplo, o conjunto de números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ não pode ser colocado em correspondência um-a-um com o subconjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Podemos afirmar categoricamente: como estamos com apenas um número finito de números, é possível escrever uma lista com *todas* as correspondências entre esses conjuntos e constatar que *nenhuma* delas é um-a-um. É claro que nesse caso é mais fácil contar.

Se o fato dos conjuntos de números naturais e pares terem a mesma cardinalidade, apesar de um ser subconjunto próprio do outro, causa alguma surpresa, mais surpresas ainda estão a caminho.

Os conjuntos de números naturais, inteiros e *racionais* têm *todos* a mesma *cardinalidade*. Isto é, a cardinalidade dos racionais é $\aleph_0$.

O fato dos números racionais serem *densos* no conjunto dos números reais enquanto os números naturais são *isolados* mostra como a intuição pode nos enganar, quando se trata de conjuntos infinitos. Dizer que o conjunto dos números racionais é denso nos reais significa que *tão próximo quanto quisermos* de qualquer número real há números racionais.

Para estabelecer uma correspondência um-a-um entre os naturais e os racionais positivos, vamos colocá-los em fila indiana. Basta organizar os racionais na forma de uma tabela. Cada linha tem frações com o mesmo numerador e cada coluna tem frações com o mesmo denominador. Na verdade, a tabela contém todos os números racionais com repetições. Por exemplo, toda a diagonal principal é formada por cópias do número 1. Ainda assim, podemos colocar os elementos da tabela em correspondência um-a-um com os números naturais.

$$
\begin{tikzcd}
1/1 \arrow[r] & 1/2 \arrow[dl] & 1/3 \arrow[r] & 1/4 \arrow[dl] & 1/5 \arrow[r] & \cdots \arrow[dl] \\
2/1 \arrow[d] & 2/2 \arrow[ur] & 2/3 \arrow[dl] & 2/4 \arrow[ur] & 2/5 \arrow[dl] & \cdots \\
3/1 \arrow[ur] & 3/2 \arrow[dl] & 3/3 \arrow[ur] & 3/4 \arrow[dl] & 3/5 \arrow[ur] & \cdots \arrow[dl] \\
4/1 \arrow[d] & 4/2 \arrow[ur] & 4/3 \arrow[dl] & 4/4 \arrow[ur] & 4/5 \arrow[dl] & \cdots \\
\vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots \arrow[ur] & \vdots & \vdots & \ddots
\end{tikzcd}
$$

33.2 A não-enumerabilidade dos números reais

Até 1874 parecia que os conjuntos se dividiam em dois tipos: finitos e infinitos, porém enumeráveis, de cardinalidade $\aleph_0$. Foi então que Cantor publicou o artigo *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen (Sobre uma propriedade da coleção de todos os números algébricos)*. Nesse trabalho Cantor mostra um conjunto infinito não-enumerável. Ele mostrou que qualquer intervalo de números reais, não importa de qual comprimento, não pode ser colocado em correspondência um-a-um com os números naturais.

Vamos provar os seguinte:

> Teorema: O intervalo $(0,\, 1)$ de todos os números reais entre 0 e 1 não é enumerável.

A prova se baseia no fato de que podemos representar cada número $x \in (0,\, 1)$ usando uma expansão em casas decimais. Assim, os racionais seriam aqueles cuja expansão é finita ou tem um padrão de repetição, que chamamos dízima periódica. Assim,

$$\frac{1}{4} = 0.25, \ \frac{12}{101} = 0.118811881188\ldots \ \frac{1}{9} = 0.1111111\ldots$$

Alguns números racionais podem ter um padrão de repetição longo, como $\frac{13}{17} = 0.76470588235294117647058823529411764705882352941 1\ldots$ e evitamos coisas como $0.499999999999\ldots$ colocando 0.5 no lugar.

No entanto, os números irracionais são caracterizados por não apresentarem qualquer padrão de repetição em sua expansão decimal. Por exemplo, $\frac{\pi}{6} = 0.523598775598298873077 10\ldots$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.70710678118654752440084\ldots$.

A prova dada por Cantor consiste em supor que existe alguma correspondência um-a-um entre o conjunto dos números naturais e o intervalo $(0,\ 1)$ e notar que isso implica uma afirmação absurda. Em linhas gerais, supondo que haja uma tal correspondência, podemos colocar *todos* os números do intervalo $(0,\ 1)$ em uma fila, escrevendo, por exemplo:

$$\begin{array}{cccc}
\mathbb{N} & & & (0,1) \\
\hline
1 & \leftrightarrow & x_1 = & 0.3667346777\ldots \\
2 & \leftrightarrow & x_2 = & 0.3667346777\ldots \\
3 & \leftrightarrow & x_3 = & 0.2500000000\ldots \\
4 & \leftrightarrow & x_4 = & 0.1231231231\ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
n & \leftrightarrow & x_n = & 0.a_1a_2a_3a_4a_5\ldots \\
\vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}$$

O absurdo que essa afirmação implica é que existe elemento do intervalo $(0,\ 1)$ que não está listado. Realmente, basta considerar o elemento cuja expansão decimal é

$$0.b_1b_2b_3b_4b_5\ldots$$

no qual b_1 é diferente do dígito da primeira casa decimal do elemento x_1, digamos $b_1 = 2 \neq 3$; b_2 é diferente do dígito da segunda casa decimal do elemento x_2, digamos $b_2 = 7 \neq 5$; e assim por diante, passando por $b_n \neq a_n$. Resumindo, mudando cada elemento na diagonal principal, produzimos um elemento de $(0, 1)$ que difere em pelo menos uma casa decimal de *todos* os elementos listados. Isso contradiz a afirmação de que todos os elementos de $(0, 1)$ já estavam na lista.

Atividade 37

Mostre que quaisquer dois intervalos (a, b) e (c, d) têm a mesma cardinalidade.

Atividade 38

Mostre que o conjunto dos números reais e o intervalo $(0, 1)$ têm a mesma cardinalidade.

Assim, o conjunto dos números reais tem *outra* cardinalidade, diferente de $\aleph_0$. No entanto, Cantor não quis dizer que a cardinalidade dos reais é $\aleph_1$, pois não sabia se haveria algum conjunto com cardinalidade intermediária, entre $\aleph_0$, a cardinalidade dos naturais e a cardinalidade dos reais. Chamou, então, a cardinalidade dos reais de $\mathfrak{c}$, significando *contínuo*.

$\mathfrak{c}$ é o c gótico.

A oposição de Kronecker não foi o principal problema que a teoria de conjuntos enfrentou. O mais grave foi notado pelo próprio Cantor, em 1899, quando ele considerou qual seria o número de elementos do conjunto de todos os conjuntos. Isto levaria a uma contradição, pois já havia sido provado que um conjunto tem "menos" elementos do que o conjunto de suas partes.

Uma versão popular do paradoxo proposto por Russell é a seguinte. Em uma cidade há um barbeiro e os homens da cidade dividem-se em dois conjuntos. Há os que fazem a barba com o barbeiro e os que fazem a sua própria barba. Responda rápido: em qual conjunto se encontra o barbeiro?

Em 1902, Bertrand Russell (1872 - 1970) e Ernest Zermelo (1871 - 1956) descobriram, independentemente, outro paradoxo que abalava novamente a teoria. Eles definiam o seguinte conjunto:

$$A = \{ X \mid X \text{ não é um elemento de } X \}$$

As afirmações "A é um elemento de A" e "A não é um elemento de A" levam a uma contradição.

Apesar dessas dificuldades, a teoria dos conjuntos chegara para ficar. Lógicos e matemáticos posteriormente deram suas contribuições para que tais contradições fossem evitadas. Entre eles o próprio Russell, Zermelo e, também, Adolf Fraenkel (1891 - 1965), cumprindo assim a profecia de Hilbert:

"Ninguém nos expulsará do paraíso criado por Cantor".

No próximo texto você conhecerá algumas contribuições à Matemática feitas por Hilbert, um criador de frases lapidares, como:

"A arte de fazer Matemática consiste em encontrar aquele caso especial que contém todos os germes da generalidade."

Texto 34: Uma Lista de Problemas – um século para resolvê-los

A virada do século 18 para 19 trouxera muitas mudanças ao mundo, mas não se compara com o que estaria por vir com a entrada do século 20. A música era outra. Ouvia-se sinfonias de Mahler, o dodecafonismo de Schoenberg, Berg e Webern. Em França soaria a requintada música de Debussy e Ravel. O mundo conheceria o jazz. Em 1913 estrearia em Paris o balé *Le sacre du printemps (A sagração da primavera)* de Stravinsky, gerando um escândalo sem precedentes no mundo da música. Na pintura, a arte de Pablo Picasso é um bom exemplo de como a velocidade das mudanças passaria para uma escala vertiginiosa. O Brasil assistiria à Semana da Arte Moderna, em 1922.

A mesma coisa ocorreria na Matemática, em que haveria uma explosão de atividade. Ao longo do século 20, ela chegou a níveis nunca antes imaginados. Os interesses se multiplicaram gerando uma miríade de novas áreas de interesse.

A classificação geral das áreas de pesquisa da AMS, a American Mathematical Society, soma perto de 100, entre as quais: teoria de números, geometria algébrica, K-teoria, medida e integração, equações diferenciais ordinárias e parciais, análise de Fourier, geometria diferencial, topologia algébrica, teoria de probabilidades e processos estocásticos, teoria de jogos, economia, biologia e outras ciências naturais, educação matemática.

David Hilbert (1862 - 1943)

A classificação completa está acessível em www.ams.org/msc.

Na virada do século, o matemático mais proeminente era David Hilbert.

Ele tinha interesse em várias áreas da Matemática, especialmente sobre problemas de álgebra de polinômios. Por exemplo, provara que qualquer ideal polinomial admite base finita.

Além disso, iniciara uma corrente de pensamento matemático chamada *for-*

malismo e tinha esperança de que tudo na Matemática poderia e deveria ser provado a partir de axiomas básicos.

Em 1899 publicou o livro *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos da Geometria)*, uma exposição rigorosa da geometria euclidiana.

No dia 08 de agosto de 1900, em Paris, Hilbert fez uma palestra no II Congresso Internacional de Matemática em que propôs vinte e três problemas de diferentes áreas da Matemática. Ele acreditava que esses problemas norteariam o desenvolvimento da Matemática ao longo do século que estava para começar. Alguns foram resolvidos logo, mas muitos continuam a inspirar os matemáticos e permanecem sem solução.

Na apresentação dos problemas, Hilbert teria dito:

> "Se quisermos ter uma idéia do desenvolvimento provável do conhecimento matemático no futuro imediato devemos fazer passar por nossas mentes as questões não resolvidas e olhar os problemas que a ciência de hoje coloca e cujas soluções esperamos no futuro."

O primeiro problema da lista ficou conhecido como a *Hipótese do Contínuo*: há alguma cardinalidade entre $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$, a cardinalidade dos números reais?

A resposta veio em 1963-4, dada por Paul Cohen, nascido em 1934, no estado de New Jersey, Estados Unidos da América. Ele mostrou que a Hipótese do Contínuo é formalmente impossível de ser decidida na teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (a teoria de conjuntos que usamos no nosso dia-a-dia).

O problema 7 pergunta se, dados os números a, algébrico, e b, irracional, seria a^b transcendente? O problema foi resolvido de maneira positiva simultaneamente por Aleksandr Gelfond (1906 - 1968), em 1934, e Theodor Schneider, nascido em 1911.

No entanto, várias questões continuam abertas. Uma das mais famosas provém do problema número 8, sobre números primos, conhecido como a *Hipótese de Riemann*. Versa sobre a distribuição dos zeros de uma função definida por Riemann, chamada ζ (zeta). Assim como no caso da Conjectura de Poincaré, há um prêmio de um milhão de dólares, oferecido pelo Clay Institute, para quem resolvê-la.

Em 2004, Xavier Gourdon verificou a Hipótese de Riemann até os primeiros dez trilhões de candidatos usando computadores. Apesar de toda essa evidência, os matemáticos reconhecerão a Hipótese de Riemann como teorema apenas quando uma prova for apresentada.

A próxima e última unidade didática tratará de números primos e criptografia. Você verá como resultados de natureza pura da Matemática podem, de repente, tornar-se de interesse aplicado.

A busca de soluções de problemas per si e a possibilidade de suas aplicações tem mantido o grande interesse pela Matemática. Isso deve continuar por muito tempo.

Unidade 10

Números e Codificação de Mensagens

Agora trataremos de assuntos atuais:
computadores, informação e códigos.

Criptografia é um assunto em que ocorre uma feliz confluência do passado e do presente, dos aspectos puro e aplicado da Matemática. É um bom exemplo de por que as questões matemáticas são importantes e continuam a atrair o interesse e a energia de tantas pessoas.

Texto 35: A Matemática às Portas de um Novo Milênio

Terminamos a unidade didática anterior mencionando Hilbert e sua lista de 23 problemas, que ele acreditava guiariam o desenvolvimento da Matemática no século 20.

Você deve estar se perguntando: o que aconteceu com a Matemática no século que findou? Teria algum matemático tão famoso quanto Hilbert elaborado uma lista de questões visando o século 21?

Isso sem contar que inauguramos, também, um novo milênio.

Pois bem, quanto à primeira pergunta, podemos dizer que a Matemática superou as mais audazes expectativas. Em termos de volume de produção, diversificação, criação de novas áreas de interesse e atividades interdisciplinares, o crescimento tem sido exponencial.

A atividade de pesquisa continuou fortíssima por todo o século 20, mesmo nos momentos mais difíceis pelos quais a humanidade passou.

A comunidade matemática manteve-se em contato, trocando informações sobre a maioria dos tópicos de pesquisa, até durante os períodos mais duros.

Por exemplo, enquanto americanos e os, então, soviéticos se engalfinhavam na chamada corrida pelo espaço, matemáticos desses países mantinham suas relações em bons termos.

É tradição na Matemática que toda informação nova seja disponibilizada permitindo que matemáticos de diferentes partes do mundo desenvolvam seus potenciais completamente.

Teorema das Quatro Cores

Quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa plano, dividido em regiões, de tal forma que regiões vizinhas não partilhem a mesma cor. Regiões que só se tocam num ponto não são consideradas vizinhas.

Uma coisa que marcou definitivamente a atividade matemática no século 20 foi o advento dos computadores, como o fez em todos os outros setores da atividade humana. Isso ocorreu diretamente, em certos casos. Um exemplo famoso é a demonstração do Teorema das Quatro Cores, que só pode ser completada com a ajuda deles.

Os computadores ampliaram imensamente nossa percepção matemática. Ganhamos amplos poderes computacionais, antes restritos a poucas e privilegiadas pessoas, como Euler e Gauss, além de uma melhor visualização de objetos matemáticos. É claro que isso é apenas a ponta de um iceberg.

Também cumprem importante papel na comunicação. Grupos de pesquisas espalhados pelo mundo mantêm-se em contato, trocando informações o tempo todo. Isso é reflexo de uma outra característica marcante da Matemática nos nossos dias: ela tornou-se uma atividade bastante gregária.

Aqui entra o tema dessa unidade: a criptografia. Mais do que nunca, em nossos dias a informação tornou-se um bem valiosíssimo. Trocar e acumular dados de modo seguro é, a um só tempo, tarefa difícil e relevante.

Mas, antes de falarmos sobre esse assunto e sobre os temas de Matemática que estão a ele relacionados, você precisa saber se há uma nova lista de problemas para o próximo século. Afinal de contas, há uma pergunta a ser respondida.

35.1 O Ano Mundial da Matemática

A União Matemática Internacional, em congresso realizado em 6 de maio de 1992, no Rio de Janeiro, propôs o ano 2000 como o Ano Mundial da Matemática e definiu três objetivos para o 2000AMM:

- indicação dos grandes desafios da Matemática para o século 21;
- promulgação da Matemática, pura e aplicada, como uma das principais chaves para o desenvolvimento;
- reconhecimento da presença constante da Matemática na sociedade de informação.

No lugar de uma lista com problemas, o encontro produziu o livro *Mathematics: Frontiers and Perspectives (Matemática: Fronteiras e Perspectivas)*, editado por quatro expoentes da Matemática: Vladimir Arnold, Michael Atiyah, Peter Lax e Barry Mazur. Trata-se de uma coletânea de artigos em que matemáticos de uma grande variedade de áreas contribuem com suas impressões e expectativas.

Um olhar sobre os colaboradores para a coletânea deixa a certeza de que a Matemática continuará a brilhar por todo o século e, depois, também. Além dos quatro editores, cooperaram para o livro nomes como Steve Smale e Peter Lax. Smale é americano, ganhador da Medalha Fields de 1966, e escreveu o artigo *Mathematical problems for the next century (Problemas matemáticos para o próximo século)*, que contém uma lista de 18 problemas. Lax foi diretor do Courant Institute, em New York, e tem interesse em Matemática e Computação, como podemos ver no título de sua contribuição: *Mathematics and computing (Matemática e computação)*.

Apesar de sujeito a críticas, o livro é uma prova da diversidade e vigor da atividade matemática.

Agora, enfocaremos especificamente criptografia.

Texto 36: Criptografia

O objetivo da criptografia é obter métodos de codificar uma mensagem de modo que apenas seu destinatário possa interpretá-la.

A palavra *criptografia* tem origem (surpresa!) grega. *Cryptos* significa secreto, oculto.

Do ponto de vista matemático, queremos um *isomorfismo*, uma maneira de *transformar* uma mensagem que se pretende transmitir em algo ilegível, mas que, ao chegar ao destinatário, este possa transformá-la de volta, na mensagem original. Chamamos *cifrar* o processo de transformar a mensagem original em um texto ilegível e *decodificar* o processo reverso. Reservamos a palavra *decifrar* para significar a descoberta do processo todo. Isto é, estamos fazendo uma distinção quanto à ação de *decodificar* uma mensagem cifrada por um método criptográfico, sem descobrir como ele funciona globalmente, da ação de *decifrar* o método, completamente.

Um exemplo simples de código consiste em permutar cada letra do alfabeto usada na mensagem pela letra seguinte. Por exemplo, a frase "A vida é bela" seria escrita codificada como "BWJEBFCFMB". O processo reverso daria "AVIDAEBELA". Esse método é bastante simples e fácil de ser *decifrado*. Note, por exemplo, que a mensagem cifrada começa com a letra B, que se repete mais duas vezes, enquanto que F aparece, ao todo, duas vezes. É conhecido que A é a letra mais usada em português, o que nos faz crer que B é o codificado de A.

36.1 A Cifra de Vigenère

Em 1586, o francês Blaise Vigenère publicou um livro contendo um método de cifrar mensagens que ficou conhecido pelo nome *cifra de Vigenère*.

Blaise Vigenère (1523 - 1596) Em função de sua atividade diplomática, começou a se interessar por criptografia e propôs a tabela no livro *Traité des chiffres ou secrètes manières d'écrire (Tratado das cifras ou modos secretos de escrever).*

O progresso feito em relação aos métodos anteriores consiste no fato de a maneira de permutar as letras para gerar a mensagem cifrada varia de letra para a letra.

A variação depende de uma palavra (ou frase) *chave* e há uma tabela conhecida de todos que codificam segundo o método. No início do processo o codificador escolhe uma palavra chave e a usa na codificação. Para que a mensagem seja decodificada, o destinatário precisa da palavra chave.

Para dar um exemplo, precisamos da tabela. (Veja adiante.) Para codificar a frase "A vida é bela" usaremos a palavra chave "Roma".

O processo consiste em colocar sobre a mensagem a ser cifrada a palavra chave, repetindo-a sucessivamente, de modo que a cada letra da mensagem corresponda uma letra da chave. Observe o exemplo:

R	O	M	A	R	O	M	A	R	O
A	V	I	D	A	E	B	E	L	A

Para codificar a letra A, usamos a linha 17 da tabela correspondente à letra R. A letra A se encontra na coluna 1. Portanto, A será codificado como R. Verifique na coluna 1 da linha 17, na tabela.

Para codificar a letra V usamos a linha 14, relativa à letra O. A letra V está na coluna 22, corresponde à letra J. Veja na coluna 22 da linha 14, na tabela.

Prosseguindo assim, obtemos a mensagem cifrada: RJUDRSNECO.

Para decodificar a mensagem, dispomos a palavra chave sobre a mensagem cifrada e executamos o processo reverso.

R	O	M	A	R	O	M	A	R	O
R	J	U	D	R	S	N	E	C	O

Veja, a letra S, da mensagem cifrada, aparece sob a letra O. A linha correspondente ao O é a 14, na qual o S se encontra na coluna 5. Na tabela, a coluna 5 tem ao alto a letra E, que aparece acentuada na frase: "A vida é bela."

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
2	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
3	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
4	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
5	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
6	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
7	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
8	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
9	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
10	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
11	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
12	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
13	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
14	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
15	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
16	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
17	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
18	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
19	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
20	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
21	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
22	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
23	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
24	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
25	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
26	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

Uma inconveniência desse código é o fato de que a mensagem, assim como a chave, devem chegar ao destinatário. Isto é, a Cifra de Vigenère é um exemplo de criptografia de chave simétrica. Apesar dessa característica, ela foi usada por muito tempo.

Charles Babbage (1791 - 1891) Projetou a *Máquina das Diferenças* e a *Máquina Analítica*. Eram calculadoras sofisticadas, precursoras do computador.

Por volta de 1855, um inglês chamado Charles Babbage descobriu como *quebrar* o código de Vigenère. Babbage foi um gênio, porém um tanto excêntrico. Ele também divisou a construção de um computador, em pleno século 19, contudo, não chegou a realizá-la. Babbage não divulgou sua descoberta de como decifrar o código de Vigenère e, em 1863, o criptógrafo Friedrich Wilhelm Kasiski, oficial da reserva do exército prussiano, publicou um método que permitia quebrar o código de Vigenère. O princípio desse método consiste em descobrir a palavra chave, começando por determinar seu comprimento.

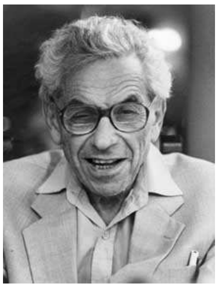
Friedrich Wilhelm Kasiski nasceu em novembro de 1805 numa pequena cidade da Prússia ocidental. Seu interesse por criptologia começou durante a carreira militar. Publicou "Die Geheimschriften und die Dechiffrierkunst"(As escritas secretas e a arte da decifração) em 1863.

Que tal uma interrupção na leitura? Aqui está uma oportunidade para você experimentar como funciona a decodificação do código de Vigenère.

Atividade 39

Decodifique a mensagem

QZQVSQVQHWIJWOSFVUHS



usando o código de Vigenère e a palavra chave ERDOS.

O húngaro Paul Erdös foi um dos mais singulares e brilhantes matemáticos do século 20.

Seu principal interesse era a Teoria de Números e a frase que você decifrou na atividade anterior, usando o nome dele como chave, era a saudação que ele usava ao chegar para visitar algum de seus muitos colaboradores de pesquisa.

Paul Erdös (1913 - 1996) não tinha posição alguma em universidades ou institutos de pesquisa e passou a vida viajando, visitando amigos matemáticos com quem trabalhava.

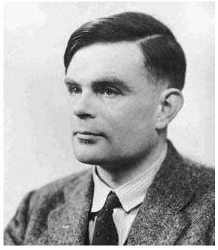
Ele costumava dizer que "um matemático é uma máquina de transformar café em teoremas".

Veja, agora, como foi importante o papel de outro matemático na decifração de um verdadeiro enigma.

Decifrando a *Enigma*

Você deve estar se perguntando se haveria algum erro no título dessa seção. Bem, a resposta é não. A Enigma era uma máquina de codificar. Depois das descobertas de Kasiski e Babbage, os criptógrafos necessitavam de novas cifras. Assim, foram inventadas máquinas criadoras de códigos que desempenharam um papel importante, especialmente durante os vários conflitos vividos pela humanidade na primeira metade do século 20.

Durante a Segunda Guerra Mundial, os alemães desenvolveram uma máquina de codificar que ficou conhecida por Enigma. Quebrar o código da Enigma passou a ser uma questão literalmente de vida ou morte. Um matemático inglês desempenhou, nesse episódio, papel fundamental. Ele se chamava Alan Turing.



Alan Turing (1912 - 1954) Era professor no King's College, Cambridge e trabalhava com teoria de máquinas, em projetos que anteciparam os modernos computadores.

Turing foi convocado pelo governo britânico e trabalhou na quebra do código aparentemente inviolável gerado pela Enigma. Os esforços de mais de sete mil funcionários, somados com as descobertas feitas por um criptólogo polonês, Marian Rejewski, de como funcionava uma versão primitiva da Enigma, e mais a perspicácia de Turing permitiram uma proeza fenomenal que deu aos aliados uma vantagem sem igual na virada do conflito.

É pena que Alan Turing não tenha recebido em vida as devidas homenagens. Primeiro, devido à natureza sigilosa da atividade, os trabalhos desse time de decifradores permaneceu em segredo por décadas. Mas é triste saber que Turing sofreu por intolerância e preconceito da sociedade em que viveu, por ser homossexual declarado. As pressões e humilhações foram tantas que ele, deprimido, cometeu suicídio.

O papel da Matemática na produção de novas cifras e na atividade de quebrá-las passou a ser cada vez mais importante.

Teoria de Números desempenha papel crucial num dos códigos mais usados na transmissão de dados por computadores, chamado RSA.

Texto 37: Números Primos, de Novo...

As questões típicas de Teoria de Números sempre exerceram um grande fascínio sobre matemáticos amadores e profissionais, seja pela simplicidade de suas formulações, seja pela dificuldade que geralmente carregam.

Vamos passar rapidamente em revista alguns principais tópicos desse assunto.

Os gregos, em particular os pitagóricos, estudaram os números extensivamente e perceberam a importância dos números primos. Eles tinham um profundo interesse pelos números perfeitos e pelos pares de números amigáveis.

Nos Elementos de Euclides encontramos a prova de que há uma infinidade de primos, a primeira demonstração por absurdo de que temos notícia e, ainda, que todo número da forma $2^{n-1}(2^n - 1)$, com $2^n - 1$ primo, é perfeito.

Posteriormente, Eratóstenes descobriu como determinar todos os números primos menores do que um certo número dado, usando o *crivo de Eratóstenes*. Aqui estão os primos menores do que 49.

$\cancel{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\cancel{4}$	$\boxed{5}$	$\cancel{6}$	$\boxed{7}$
$\cancel{8}$	$\cancel{9}$	$\cancel{10}$	$\boxed{11}$	$\cancel{12}$	$\boxed{13}$	$\cancel{14}$
$\cancel{15}$	$\cancel{16}$	$\boxed{17}$	$\cancel{18}$	$\boxed{19}$	$\cancel{20}$	$\cancel{21}$
$\cancel{22}$	$\boxed{23}$	$\cancel{24}$	$\cancel{25}$	$\cancel{26}$	$\cancel{27}$	$\cancel{28}$
$\boxed{29}$	$\cancel{30}$	$\boxed{31}$	$\cancel{32}$	$\cancel{33}$	$\cancel{34}$	$\cancel{35}$
$\cancel{36}$	$\boxed{37}$	$\cancel{38}$	$\cancel{39}$	$\cancel{40}$	$\boxed{41}$	$\cancel{42}$
$\boxed{43}$	$\cancel{44}$	$\cancel{45}$	$\cancel{46}$	$\boxed{47}$	$\cancel{48}$	$\cancel{49}$

Novos progressos só ocorreram com os trabalhos de Fermat, no início do século 17. Fermat conhecia algum *método de fatoração*, pois foi capaz de fatorar $2027651281 = 44021 \times 46061$ em relativamente pouco tempo.

Outra grande contribuição sua foi o Pequeno Teorema de Fermat.

37.1 Testes de primalidade

Uma questão de relevo a respeito de números inteiros é decidir se um dado número é primo ou não. Caso o número seja decomponível, a questão seguinte é descobrir sua fatoração, algo substancialmente mais difícil.

O resultado de Fermat é importante porque dá um critério de primalidade.

Como exemplo da dificuldade dessa questão, examinemos os números $M_n = 2^n - 1$, conhecidos como números de Mersenne. Uma condição necessária para que M_n seja primo é que n seja primo. No entanto, $M_{11} = 2047 = 23 \times 89$ é um número composto, apesar de 11 ser primo.

O maior número primo conhecido (em fevereiro de 2005) é o quadragésimo segundo número de Mersenne primo, $M_{25\,964\,951}$, que tem $7\,816\,230$ dígitos.

Neste ponto da história, entra em cena um de nossos campeões – Leonhard Euler.

A abordagem usada por Euler para mostrar que $2^{32}+1$ é um número composto é uma prova de que temos muito o que aprender com as idéias dos mestres do passado.

Veja qual foi a estratégia por ele usada.

37.2 Euler e os números primos

Fermat acreditava que os números da forma $2^{2^n}+1$ seriam primos. Isso é verdade para $n = 1, 2, 3$ e 4, onde temos $2^{2^n}+1 = 5$, 17, 257 e $65\,537$, respectivamente, todos primos. Porém, $2^{32}+1$ é um pequeno gigante $4\,294\,967\,297$.

Como você já sabe, Euler demonstrou vários resultados enunciados por Fermat, inclusive o seu Pequeno Teorema. Note que Euler usou esse resultado para provar que $2^{32}+1$ é composto, contrariando a hipótese de Fermat.

Euler começou observando o seguinte:

> Se a é um número par e p é um primo que não é um fator de a mas divide a^2+1, então $p = 4k+1$, para algum inteiro k.

Por exemplo, seja $a = 8$. Então, $8^2+1 = 65 = 5\times 13$, tem fatores primos 5 e 13. Em ambos os casos, p é da forma $4k+1$.

Veja, a seguir, como Euler mostrou, usando o Pequeno Teorema de Fermat, a afirmação acima.

O fato de p dividir a^2+1, um número ímpar, indica que p é ímpar. Agora, todo número ímpar é da forma $4k+3$ ou $4k+1$. Portanto, para provar o resultado, bastava mostrar que a possibilidade $p = 4k+3$ não ocorre.

A demonstração será por absurdo. Suponhamos que $p = 4k+3$. Como p é primo, o Pequeno Teorema de Fermat garante que p divide $a^p - a = a\,(a^{p-1}-1)$. Por hipótese, p não é um fator de a. Concluímos que p divide $a^{p-1}-1$.

Assim, p divide $a^{p-1}-1 \;=\; a^{4k+2}-1$. Usaremos essa informação em breve.

Por outro lado, a fatoração

$$(a^2+1)\,(a^{4k}-a^{4k-2}+a^{4k-4}-\cdots+a^4-a^2+1) \;=\; a^{4k+2}+1,$$

e o fato de que p divide, por hipótese, $a^2 + 1$, garante que p divide $a^{4k+2} + 1$.

Reunimos, agora, essa informação com a anterior:

Como p divide $a^{4k+2} - 1$ e $a^{4k+2} + 1$, também divide a diferença, ou seja:

$$p \text{ divide } (a^{4k+2} + 1) - (a^{4k+2} - 1) \;=\; 2.$$

Mas isso é uma contradição, pois p é ímpar por hipótese.

Logo, p é da forma $4k + 1$, para algum k, como foi enunciado.

Para que você ganhe um pouco mais de percepção desse fato,
tente fazer a atividade a seguir.

Atividade 40

Determine os fatores primos de $8^4 + 1$ e mostre que eles são da forma $8k + 1$.

Agora, vamos continuar com Euler que, prosseguindo, provou uma seqüência de resultados que culminou em:

Se a é par, p é primo e p divide $a^{32}+1$, então p é da forma $64k+1$.

Armado dessa informação, ele atacou a questão de fatorar $2^{32}+1$. Os resultados obtidos indicavam *bons* candidatos à fatoração. Quais são os primos da forma $64k + 1$? Isso ocorre para os casos de $k = 3$, 4, 7, 9 e 10, por exemplo, onde $p = 193$, 257, 449, 577 e 641, respectivamente.

Uma das grandes contribuições de Euler para a Teoria de Números foi perceber que certas técnicas de análise matemática poderiam ser usadas no estudo dos números.

Os quatro primeiros primos não dividem $2^{32} + 1$. Mas quando Euler fez a conta com 641, obteve a recompensa pelo trabalho: $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$.

37.3 Outras contribuições para a Teoria de Números

Se nos surpreendemos com o fato de que a série harmônica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, surpresa ainda maior vem do fato de que a soma dos inversos dos números primos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$$

também diverge.

Uma das questões que interessou as gerações de matemáticos após Euler foi a distribuição dos primos. Por exemplo, Dirichlet demonstrou em 1837 o seguinte teorema, conjecturado por Gauss:

> Se $(a, b) = 1$ (a e b são relativamente primos), então a progressão aritmética $a+b, 2a+b, 3a+b, \ldots$ contém uma infinidade de números primos.

Esse resultado generaliza o teorema da infinitude de primos.

Veja algumas questões abertas a respeito de números primos:

- há uma infinidade de números primos da forma $n^2 + 1$?
- sempre há um primo entre n^2 e $(n + 1)^2$?
- a seqüência de Fibonacci contém um número infinito de números primos?
- há uma infinidade de primos gêmeos (como 11 e 13, 41 e 43)?

A falta de um padrão aparente de distribuição dos números primos entre os números inteiros indica a riqueza do tema. Gauss e Legendre foram pioneiros ao tratarem desse assunto.

Chamamos de $\pi(n)$ o número de primos menores ou iguais a n.

Por exemplo, $\pi(10) = 4$, $\pi(20) = 8$, $\pi(50) = 15$.

Legendre conjecturou que

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln(n) - 1.0836},$$

dando uma estimativa para $\pi(n)$. O número 1.0836 é chamado de constante de Legendre.

Gauss, por sua vez, acreditava que

É admirável o esforço que Gauss e Legendre despenderam. Devemos lembrar que eles não dispunham de computadores ou sequer uma simples máquina de calcular.

$$\pi(n) \sim \mathsf{Li}(n) = \int_2^n \frac{1}{\ln x}\, dx.$$

Estima-se que Gauss tenha contado todos os primos até três milhões. Ou seja, que ele tenha calculado $\pi(3\,000\,000)$.

O $216\,816$-ésimo primo é o número $2\,999\,999$ e o seguinte é $3\,000\,017$.

O que ficou conhecido como *Teorema dos Números Primos* é

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n/\ln(n)} \;=\; 1.$$

Uma área que desperta muito interesse atualmente consiste em encontrar formas de determinar se um dado número é primo. Há dois tipos de testes, basicamente:

- testes probabilísticos – em que se usam computadores;
- testes de natureza teórica – como o teste de Lucas-Lehmer.

Pode-se dizer que há grande demanda por números primos.

O Teorema dos Números Primos foi demonstrado em 1896 pelo matemático francês Jacques Hadamard (1865 - 1963) e, independentemente, por Charles Jean Gustave de la Vallée Poussin (1866 - 1962), matemático belga. Parece que Teoria de Números é uma espécie de elixir da longa vida.

Veja, agora, como os números primos exercem papel importante na criptografia RSA.

Texto 38: Criptografia RSA

A sigla RSA provém dos sobrenomes de Ronald L. Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, que trabalhavam no MIT (Massachusetts Institute of Technology) quando inventaram esse código, em 1978.

RSA é um exemplo de criptografia de chave assimétrica. Isto é, há uma chave pública, que todos podem conhecer, que serve para cifrar a mensagem. Porém, há uma chave privada, que é usada para decodificar a mensagem.

Veja como funciona, em linhas gerais: para cifrar uma mensagem utiliza-se um número $n = p\,q$, produto de dois primos. Essa é a chave pública.

A chave privada consiste dos dois fatores primos de n: p e q. Para decodificar a mensagem não basta conhecer n, é necessário usar seus fatores primos. Parece estranho, não? Conhecendo n, sabemos, *teoricamente*, seus fatores primos. No entanto, o funcionamento do método se baseia no fato de que, para números grandes (mais de 150 algarismos), com os métodos atuais, é impossível determinar p e q. Não é irônico que um método deposite toda a sua eficiência na incapacidade de se fazer alguma coisa teoricamente possível?

Há muita literatura disponível sobre esse fascinante aspecto da Matemática atual.

Assim chegamos ao fim de nossa disciplina, mas não ao fim da história.

Esperamos que no decorrer desse tempo que passamos juntos você tenha percebido a importância das questões matemáticas.

Lembre-se, as questões podem ser antigas, mas as idéias são atemporais.

Concluímos com uma frase memorável de Godfrey Harold Hardy, um matemático do século 20, que, ao lado de John Edensor Littlewood e Srinivasa Ramanujan, atuou em Teoria de Números.

A frase aparece num livro que ele escreveu, chamado "A Apologia de um Matemático".

> "Eu acredito que a realidade matemática existe fora de nós, que nossa função é descobrir ou observá-la, e que os teoremas que provamos, e que descrevemos com grandiloqüência como nossas 'criações', são simplesmente notas de nossas observações."

Complemente o Estudo

Filmes

A Matemática não tem sido muito favorecida como tema de filmes. Mas, recentemente três filmes chamaram a atenção para temas matemáticos. É verdade que eles servem mais para diversão do que para nos informar sobre fatos, mas essa é a principal razão para se fazer filmes, não é mesmo?

No entanto, eles podem ser úteis como ponto de partida para discussões sobre temas de Matemática.

Nome do Filme: Enigma (2001)

Direção: Michael Apted

Sinopse: Em março de 1943, a equipe de elite dos decodificadores da Inglaterra tem uma responsabilidade monumental: decifrar o Enigma, um código ultra seguro utilizado pelos nazistas para enviar mensagens aos seus submarinos. Para liderar este trabalho é chamado um gênio da matemática que consegue realizar tarefas consideradas impossíveis pelos especialistas.

Nome do Filme: Uma Mente Brilhante (A Beautiful Mind) (2001)

Direção: Ron Howard

Sinopse: John Nash é um gênio da matemática que, aos 21 anos, formulou um teorema genial. Aos poucos ele se transforma em um sofrido e atormentado homem, que chega a ser diagnosticado como esquizofrênico. Após anos de luta para se recuperar, ele consegue retornar à sociedade e acaba recebendo o Prêmio Nobel de Economia em 1994.

Nome do Filme: Gênio Indomável (Good Will Hunting) (1997)

Direção: Gus Van Sant

Sinopse: Em Boston, um jovem de 20 anos, servente de uma universidade, revela-se um gênio em Matemática. Por determinação legal, precisa fazer terapia, mas nada funciona, pois ele debocha de todos os analistas, até se identificar com um deles.

Neste filme você verá, como cenário, o MIT (Massachusetts Institute of Technology), um dos templos da ciência, e da Matemática, em particular.

Livros

A literatura de divulgação de temas matemáticos é rica, mas a publicação em português não é muito grande. No entanto, alguns livros se destacam.

Nome do Livro: A Experiência Matemática (1982)

Autores: Philip J. Davis e Reuben Hersh

Esse livro aborda diversos tópicos e contém bastante informação. Além disso, pode ser lido por partes, uma vez que suas seções são independentes.

Nome do Livro: O Último Teorema de Fermat (1998)

Autor: Simon Singh

O livro conta, de maneira empolgante, toda a trajetória de um grande problema de Matemática. É livro para ser lido em um único fôlego e relido, diversas vezes.

Nome do Livro: O Livro dos Códigos (2001)

Autor: Simon Singh

Desta vez o autor narra a história da Criptografia.

Nome do Livro: Número: A Linguagem da Ciência

Autor: Tobias Dantzig

Esse livro é difícil de achar pois está fora do prelo. Entretanto, se encontrado na biblioteca de algum amigo ou em alguma loja de livros usados pode dar muito prazer além de muita informação.

Sites

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/index.html.

Este site sobre História da Matemática é excelente.

http://mathworld.wolfram.com

Este site é uma enciclopédia de Matemática. Com a ferramenta de busca você poderá encontrar definições e teoremas sobre assuntos clássicos e atuais.

Solução de algumas atividades

Apresentamos, a seguir, a solução para as atividades propostas no módulo. Não incluímos todas por considerar que algumas não necessitam de gabarito. No entanto, se você tiver alguma dúvida, tanto nas respostas apresentadas, como na resolução das outras atividades, sugerimos que consulte a tutoria.

- Atividade 2

Como sabemos dividir um ângulo em dois, com régua e compasso, podemos dizer que sabemos construir certas "famílias" de polígonos. Por exemplo, o triângulo, assim como o hexágono, o dodecágono, e assim por diante. Também podemos construir o quadrado, o octógono, e assim por diante.

Como $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$, podemos construir o pentágono usando régua e compasso, assim como o decágono, o dodecágono, e assim por diante.

A lista parou por aqui, cerca de uns dois mil anos, até Gauss mostrar ser possível construir, com régua e compasso, o polígono de dezessete lados. Posteriormente, os polígonos com $(4^n + 1)$-lados foram agregados à lista dos que podem ser assim construídos.

- Atividade 5

$$\begin{array}{rrl} 31 & 26 & \\ 62 & 13 & / \\ 124 & 6 & \\ 248 & 3 & / \\ 496 & 1 & / \end{array}$$

Assim, segundo esse algoritmo, $31 \times 26 \ = \ 62 + 248 + 496 = 806$.

- Atividade 6

A tripla pitagórica gerada pelos números $u = 64$ e $v = 27$ é $(3456,\ 3367,\ 4825)$.

Os números 4601 e 6649 fazem parte da tripla pitagórica $(4800,\ 4601,\ 6649)$, gerada pelos números $u = 32 = 2^5$ e $v = 75 = 3 \times 5^2$.

- Atividade 8

A decomposição em fatores primos de $12\,285$ é $3^3 \times 5 \times 7 \times 13$. A soma de seus divisores próprios é $14\,595$, o outro elemento do par de números amigáveis: $(12\,285,\ 14\,595)$.

- Atividade 10

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}.$$

Por exemplo, $1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1)))))) = \frac{34}{21} \approx 1.619047619$. Uma *boa* aproximação de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é 1.618033989.

- Atividade 11

Não existe inteiro n tal que $\dfrac{1}{2^n} = 0$.

Sabemos que $1 + r + r^2 + r^3 + \dots r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$. Se $|r| < 1$, então $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

- Atividade 12

Por exemplo, se $m < \sqrt{2}\,n$, então $m\,\sqrt{2} < 2\,n$. Basta multiplicar a primeira desigualdade por $\sqrt{2}$. Os gregos do tempo de Eudoxo não dispunham desse argumento. É possível comprovar a veracidade da afirmação usando um argumento geométrico. Veja, um quadrado de lado $n\,\sqrt{2}$ tem diagonal $2\,n$. Agora, se $m < \sqrt{2}\,n$, podemos desenhar um quadrado de lado m contido no quadrado de lado $\sqrt{2}\,n$ e sua diagonal $m\,\sqrt{2}$ é menor do que a diagonal do quadrado maior, que é $2\,n$.

- Atividade 14

$K = \dfrac{\pi}{4}$.

- Atividade 15

Os fatores primos de $3 \times 5 \times 7 + 1$ são 2 e 53, primos diferentes de 3, 5 e 7.

- Atividade 17

Conhecendo o volume v e a massa m da coroa, assim como as constantes γ e σ, podemos resolver a equação em x e descobrir quanto ouro e prata há nela sem destruí-la. Sabendo que $\gamma = 19\,300$kg/m^3 e $\sigma = 10\,500$kg/m^3, descubra o peso do ouro no caso da coroa ter volume $v = 0.15$m^3.

- Atividade 18

A próxima linha é 21, 23, 25, 27 e 29. Note que $21+23+25+27+29 = 125 = 5^3$.

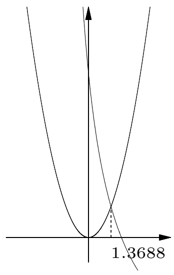
- Atividade 19

$64 = (3^2+2^2)\,(1^2+2^2) = (3\times1\pm2\times2)^2+(3\times2\mp2\times1)^2 \;=\; 49+16 \;=\; 1+64.$

- Atividade 20

Nem todas as propriedades das somas finitas são verdadeiras no caso das somas infinitas, como é o caso da propriedade distributiva.

- Atividade 22



Note que a hipérbole $(x+2)\,(y+10) = 40$ contém os pontos $(2,\,0)$ e $(0,\,10)$. A projeção do ponto comum sobre o eixo x ocorre entre 1.3 e 1.4.

- Atividade 23

Colocando numa equação, temos $x = x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4$. A solução é $x = 84$.

- Atividade 24

A substituição $x = y - \frac{2}{3}$ transforma a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ em $y^3 + \frac{26}{3}y = \frac{704}{27}$.

Fazendo $3st = \frac{26}{3}$ e $s^3 - t^3 = \frac{704}{27}$ chegamos à equação $t^6 + \frac{704}{27}t^3 - \frac{26^3}{27^2} = 0$, cuja solução *positiva* é $t^3 = \frac{-352+6\sqrt{3930}}{27}$. Assim, $s^3 = \frac{704}{27} + t^3 = \frac{352+6\sqrt{3930}}{27}$. Sabemos que $s - t$ é solução de $y^3 + \frac{26}{3}y = \frac{704}{27}$. Assim,

$$y = \frac{\sqrt[3]{352+6\sqrt{3930}} + \sqrt[3]{352-6\sqrt{3930}}}{3}.$$

Finalmente, $x = y - \frac{2}{3}$ leva à solução indicada na atividade.

- Atividade 25

Fazendo de conta que você não tenha notado que na equação $x^3 - 15x = 4$, $A = -15 < 0$, aplicamos a técnica de cálculo das raízes por radicais, fazendo $3st = -15$ e $s^3 - t^3 = 4$. Isso leva à equação $t^6 + 4t^3 + 125 = 0$, cujas raízes são $t^3 = -2 \pm \sqrt{-121} = -2 \pm 11\sqrt{-1}$.

Agora, os problemas. Primeiro, a raiz negativa. Se você não conhece a teoria dos números complexos, como era o caso de Cardano, pode seguir com a conta usando essa resposta *formal*. A outra possibilidade é que você a tome como um número complexo. De qualquer forma, como escolher t^3 positivo, como fizemos antes, se t^3 não é mais um número real? Neste caso, escolhemos qualquer um, digamos $t^3 = -2 + 11\sqrt{-1}$. Isso nos dá a $s^3 = 4 + t^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$ e $s - t = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$ é uma *estranha* solução de $x^3 - 15x = 4$. O mistério se desfaz ao observarmos que $(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$, assim como $(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$. Portanto,

$$s - t = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = 2 + 11\sqrt{-1} + 2 - 11\sqrt{-1} \; = \; 4$$

é apenas uma maneira um tanto diferente de escrever o número 4.

- Atividade 27

Uma sugestão consiste em arranjar a soma da maneira a seguir.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{1}{2} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{32} & + & \frac{1}{64} & + & \cdots \\
 & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{32} & + & \frac{1}{64} & + & \cdots \\
 & & & + & \frac{1}{8} & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{32} & + & \frac{1}{64} & + & \cdots \\
 & & & & & + & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{32} & + & \frac{1}{64} & + & \cdots \\
 & & & & & & & + & \frac{1}{32} & + & \frac{1}{64} & + & \cdots \\
 & & & & & & & & & + & \frac{1}{64} & + & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & \vdots \\
\hline
\frac{1}{2} & + & \frac{2}{4} & + & \frac{3}{8} & + & \frac{4}{16} & + & \frac{5}{32} & + & \frac{6}{64} & + & \cdots \; =
\end{array}$$

A resposta é um número inteiro.

- Atividade 32

Aqui estão as três maneiras de escrever 99 como uma soma de quatro quadrados: $99 = 1 + 1 + 16 + 81 = 1 + 9 + 25 + 64 = 9 + 16 + 25 + 49$.

Você sabia que podemos escrever 98 de *quatro* maneiras diferentes como soma de quatro quadrados?

- Atividade 33

Essa é interessante. Faça $x^4 + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^2 - ax + 1)$ e calcule a.

- Atividade 34

$4x \equiv 6 \mod 18$ tem duas soluções (residuais): 6 e 15; $4x \equiv 8 \mod 12$ tem quatro soluções: 2, 5, 8 e 11; $2x \equiv 7 \mod 13$ tem uma solução.

- Atividade 36

Por exemplo, $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$.

- Atividade 37

A função $f(x) = \dfrac{c-d}{a-b}\,x + \dfrac{ad-bc}{a-b}$ estabelece uma bijeção entre os intervalos $(a,\, b)$ e $(c,\, d)$.

- Atividade 38

A função $f(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right)$ estabelece uma bijeção entre o intervalo $(0,\, 1)$ e a reta real.

- Atividade 39

A linda frase que Paul Erdös usava para saudar seus amigos e colegas pesquisadores é "Minha mente está aberta".

- Atividade 40

$8^4 + 1 = 4097 = 17 \times 241$. Note que $17 = 2 \times 8 + 1$ e $241 = 30 \times 8 + 1$.

Referências

ANGLIN, W. S. *Mathematics:* A Concise History and Philosophy. New York: Springer Verlag, 1994.

BELL, E. T. *Men of Mathematics*. New York: Touchstone, 1965.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

COURANT, R. e ROBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

COUTINHO, S. C. *Números Inteiros e Criptografia RSA*. Rio de Janeiro: IMPA / SBM, 1997.

DANTZIG, T. *Número:* A Linguagem da Ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970

DAVIS, P. e HERSH, R. *A Experiência Matemática*. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1982.

DÖRRIE, H. *100 Great Problems of Elementary Mathematics:* Their History and Solution. New York: Dover, 1965.

EVES, H. *História da Matemática*. São Paulo: UNICAMP, 1996.

GRIFFITHS, H. B. e HILTON, P. J. *Matemática Clássica* – Uma Interpretação Contemporânea. São Paulo: Blücher / USP, 1975.3 v.

HEFEZ, A. *Curso de Álgebra*. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. (Coleção Matemática Universitária).

SANTOS, J. P. de O. *Introdução à Teoria de Números*. Rio de Janeiro: IMPA, 1998. (Coleção Matemática Universitária).

SINGH, S. *O Último Teorema de Fermat*. Rio de Janeiro: Record, 1998.

SINGH, S. *O Livro dos Códigos*. Rio de Janeiro: Record, 2001.

STRUIK, D. J. *A Concise History of Mathematics*. New York: Dover, 1987.

Serviço gráfico realizado em parceria com a Fundação Santa Cabrini por intermédio do gerenciamento
laborativo e educacional da mão-de-obra de apenados do sistema prisional do Estado do Rio de Janeiro.

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

FUNDAÇÃO SANTA CABRINI Provedora de acesso à Cidadania

Maiores informações: www.santacabrini.rj.gov.br

Este material foi gentilmente cedido por
Centro de Estudos de Pessoal (CEP)

ISBN 85-98569-36-4
9788598569369

UENF
Universidade Estadual
do Norte Fluminense

UERJ
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Universidade Federal Fluminense
uff

Universidade do Brasil

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

UNIRIO

FUNDAÇÃO
SANTA CABRINI
Provedora de acesso à Cidadania

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

GOVERNO DO
Rio de Janeiro
SECRETARIA DE
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UAB
UNIVERSIDADE
ABERTA DO BRASIL

Ministério
da Educação

BRASIL
UM PAÍS DE TODOS
GOVERNO FEDERAL